رياضيات الأعمال

رؤيــة تجاريــة واقتصاديــة

الأستاذ الدكتور / إبراهيم محمد مهدى

أستاذ الرياضيات والإحصاء الاكتوارى

عميد كلية التجارة - جامعة المنصورة (سابقاً)

الدكتور / أشرف أحمد البدرى

مدرس الرياضيات والإحصاء

الدكتور / جمال عبد الباقى واصف

مدرس الرياضيات والتأمين

قسم الإحصاء التطبيقى والتأمين

كلية التجارة جامعة المنصورة

٢٠٠٣/٢٠٠٢

الناشر : مكتبة الجلاء الجديدة بالمنصورة

ت : ٢٢٤٧٣٦٠ المنصورة

ملحوظة

الكتاب به ميل من الأصل

مقدمة

لقد تم اعداد هذا الكتاب في الرياضيات للدارسين في المجالات التجارية والاقتصادية والذين يمثلون مستويات متفاوته من التعليم والالمام بالاسس الرياضية البحته . ولما كانت الرياضيات تمثل ركيزة أساسية للدارسين بكليات التجارة في مختلف التخصصات ، فقد روعي أن يتم تدريس هذا الكتاب في العام الاول للدراسة بالكلية .

ويشمل هذا الكتاب على الاسس الرياضية التي يلزم الالمام بها لكل طالب . لذا فإن هذا الكتاب يحتوي على التطبيق التجاري لأسس الرياضة البحتة ، حيث تناولنا هذا الكتاب في عشرة فصول متتالية بحيث يتناول الفصل الأول المتواليات العددية وتطبيقاتها التجارية . وفي الفصل الثاني سنتناول دراسة المعادلات الخطية وتطبيقاتها التجارية ، أما الفصل الثالث فيتناول تحليل السلاسل الزمنية ومعادلة خط الإتجاه العام .

كما تناول الفصل الرابع من هذا الكتاب نظريات المحددات والمصفوفات وتطبيقاتها التجارية والاقتصادية . وفي الفصل الخامس سنتناول دراسة تطبيق تجاري هام على المصفوفات وهو تحليل المدخلات والمخرجات على المستوى القومي ، وفي الفصل السادس نتناول دراسة البرمجة الخطية مع التركيز على الطريقة البيانية منها ، ولقد إنفرد الفصل السابع بدراسة علم التفاضل وتطبيقاته التجارية والاقتصادية . أما الفصل الثامن فقد تناول دراسة علم التكامل وتطبيقاته التجارية والإقتصادية . وفي الفصل التاسع تم دراسة المحاكاة واستخداماتها في التحليلات المالية ، وفي النهاية تناول الفصل العاشر والأخير تطبيقات تجارية متنوعة شاملة تحليل ماركوف ، وصفوف الإنتظار ، وتحليل التعادل .

وأننا إذ نقدم هذه الدراسة نرجو أن نساعد في خلق مكتبة عربية للتحليل الرياضي للتجاريين والاقتصاديين وأن تكون ذات نفع لكل من يدرس أو يعمل في المجالات التجارية والاقتصادية وفي هذا المقام نسأل الله العلي القدير أن نكون قد أضفنا كتاباً نافعاً إلى مكتبة رياضيات الأعمال ، ونسأله تعالى دوام التوفيق إلى مايحبه ويرضاه.

المؤلفون

قائمة المحتويات

الصفحة

الفصل الأول : المتواليات العددية والهندسية

المتوالية العددية	٣
التطبيقات التجارية للمتوالية العددية	٦
المتوالية الهندسية	٢٢
التطبيقات التجارية للمتوالية الهندسية	٢٥
تطبيقات تجارية على المتوالية الهندسية اللانهائية	٤٠

الفصل الثاني: المعادلات الخطية

صورة معادلة الخط المستقيم والتمثيل البياني لها	٥١
البعد بين نقطتين على الخط المستقيم	٥٣
معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطتين	٥٨
معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل ونقطة	٦١
تقدير معادلة الخط المستقيم بالمربعات الصغرى	٦٦
تطبيقات تجارية على معادلة الخط المستقيم	٧٣

الفصل الثالث : تحليل السلاسل الزمنية

عناصر السلسلة الزمنية	٩٤
قياس الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى	٩٦
قياس التغيرات الموسمية بطريقة المتوسطات البسيطة	١١٢
التنبؤ بقيمة الظاهرة موسمياً	١١٤

الفصل الرابع : المحددات والمصفوفات

المحددات	١٢٥

مفكوك المحدد بطريقة كرمر وطريقة سارس ١٣٢
المحددات وحل المعادلات الخطية ١٤٣
المصفوفات ١٦٦
العمليات الرياضية للمصفوفات ١٧٤
المصفوفات وحل المعادلات الخطية ١٩٤
التطبيقات التجارية للمحددات والمصفوفات ٢٠٦

الفصل الخامس : تحليل المدخلات والمخرجات .
مفهوم نموذج المنتج والمستخدم ٢٤٥
نموذج المنتج والمستخدم لقطاعين ٢٥٦
نموذج المنتج والمستخدم لثلاث قطاعات ٢٥٨

الفصل السادس : البرمجة الخطية .
مجالات وخصائص البرمجة الخطية ٢٨٣
المتباينات ٢٨٦
العرض البياني للمتباينات الخطية ٢٩٠
الحل البياني لمشكلة البرمجة الخطية ٣٠٠
تطبيقات عملية على البرمجة الخطية ٣١٢

الفصل السابع : التفاضل وتطبيقاته التجارية
متوسط التغير والميل ٣٣٣
معدل التغير اللحظي ٣٣٦
القواعد الأساسية للتفاضل ٣٤٢
التطبيقات التجارية للتفاضل ٣٥٣
النهايات العظمى والصغرى ٣٧١
التطبيقات التجارية للنهايات العظمى والصغرى والتفاضل ٣٨٤

الفصل الثامن : التكامل وتطبيقاته التجارية .

مفهوم التكامل .	٤٠٩
التكامل غير المحدود .	٤١٠
قواعد التكامل غير المحدود .	٤١١
التكامل المحدود .	٤٢٠
التطبيقات التجارية والإقتصادية على التكامل .	٤٢٨

الفصل التاسع : المحاكاة والتحليلات المالية .

المحاكاة وتقدير المبيعات لفترة مستقبلة	٤٥٩
إستخدام المحاكاة في التحليل المالي	٤٦٥
إستخدام المحاكاة في الرقابة على المخزون السلعي	٤٦٩

الفصل العاشر : تطبيقات تجارية متنوعة .

تحليل ماركوف	٤٩٠
صفوف الإنتظار	٤٠٧
تحليـــل التعـــادل	٥١٧
المـــــــراجع .	٥٣٥
العلاقات الرياضية لرياضيات الأعمال (ملخص)	٥٣٧

الفصل الأول

المتواليات العددية والهندسية

وتطبيقاتها التجارية

- المتوالية العددية ·
- التطبيقات التجارية للمتواليات العددية ·
- المتوالية الهندسية ·
- التطبيقات التجارية للمتواليات الهندسية ·
- المتوالية الهندسية اللانهائية ·
- تطبيقات تجارية على المتواليات الهندسية اللانهائية التنازلية ·

(١-١) المتوالية العددية :

تعرف المتوالية العددية بإنها مجموعة من الكميات المتتالية ، والفرق بين أى كمية منها (غير الأولى) والكمية السابقة لها مباشرة يساوى مقدار ثابتاً يسمى أساس المتوالية.

فمثلاً :

☒ مجموعة الأعداد ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ...

تكون متوالية عددية أساسها ٢

☒ مجموعة الأعداد: ٢٠ ، ١٧ ، ١٤ ، ١١ ، ٨ ، ...

تكون متوالية عددية أساسها (-٣)

وبصفة عامة يمكن كتابة أى متوالية عددية على الصورة:

أ ، (أ+د) ، (أ+٢د) ، (أ+٣د) ، ...

حيث :

(أ) هو الحد الأول للمتوالية العددية ، (د) هو أساس المتوالية العددية ، ويمكن أن تكون (د) مقداراً موجباً أو سالباً. أو مقداراً صحيحاً أو كسرياً.

كيفية إيجاد الحد العام في المتوالية العددية :

في المتوالية العددية التي في الصورة :

أ ، (أ+د) ، (أ+٢د) ، (أ+٣د) ، ...

نجد أن :

الحد الأول هو (أ)

الحد الثانى هو (أ + د)

الحد الثالث هو (أ + ٢د)

الحد العاشر هو (أ + ٩د)

وهكذا يكون مثلاً :

الحد العاشر فهو (أ + ٩د)

وعلى ذلك يكون الحد الذي ترتيبه (ن) والذي يطلق عليه الحد النوني هو :

$$ح_ن = أ + (ن-١) د$$

فلإيجاد الحد السابع في متوالية عددية ، يكون :

$ح_٧ = أ + (٧-١) د = أ + ٦ د$

كيفية إيجاد مجموع المتوالية العددية :

يمكن إيجاد حاصل جمع (ن) من الحدود إبتداء من الحد الأول للمتوالية العددية بإستخدام أحد القانونيْن الآتييْن:

(١) $جـ_ن = \frac{ن}{٢} \times (أ + ل)$ حيث (ل) هو الحد النونى

(٢) $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) د]$

مثال (١)

متوالية عددية حدها الأول = ٤ وأساسها = ٣ أوجد الحد التاسع.

الحـــل

$ح_٩ = أ + (٩ - ١) د = ٤ + ٨ \times ٣ = ٤ + ٢٤ = ٢٨$

مثال (٢)

أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتوالية: ٣٥ ، ٤٠ ، ٤٥ ،.....

الحـــل

$\because جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) د]$

$= \frac{١٠}{٢}$ [(٢ × ٣٥) +(٩ ×٥)] = ٥ (٧٠ +٤٥) = ٥٧٥

حل آخر :

يمكن إيجاد المجموع بطريقة أخرى كما يلي:

الحد العاشر (ل) = أ + (ن − ١) د

= ٣٥ + ٩ × ٥ = ٣٥ + ٤٥ = ٨٠

∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

$= \frac{١٠}{٢}$ (٣٥ + ٨٠) = ٥ × ١١٥ = ٥٧٥

مثال (٣)

أوجد حاصل جمع السبعة حدود الأولى من المتوالية :

١٢٠ ، ١١٠ ، ١٠٠ ، ....

الحـــل

الحد السابع (ل) = أ + (٧ −١) د

= ١٢٠ + ٦ (−١٠)= ١٢٠ − ٦٠ = ٦٠

∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل) $= \frac{٧}{٢}$(١٢٠ + ٦٠)

= ٣,٥ × ١٨٠ = **٦٣٠**

حل آخر : يمكن إيجاد المجموع بطريقة أخرى كما يلي:

جـ $= \frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) د]

جـ $= \frac{٧}{٢}$ [٢ × ١٢٠ + ٦ × (−١٠)] $= \frac{٧}{٢}$ (٢٤٠ − ٦٠)

$= \frac{٧}{٢}$ × ١٨٠ = **٦٣٠**

التطبيقات التجارية للمتواليات العددية:

تلعب المتواليات العددية دوراً هاماً في التطبيقات التجارية المختلفة ، ونبين فيما يلي أهم التطبيقات العملية للمتواليات العددية .

أولاً : إستهلاك الأصول الثابتة بقسط ثابت :

يمكن أيجاد القيمة الدفترية لأي أصل ثابت في بداية السنة (ن) باستخدام قانون الحد النوني للمتواليات العددية بشرط أن يكون النظام المتبع لإهلاك الأصول الثابتة هو نظام القسط الثابت ، ويكون :

$$ح_ن = أ + (ن-١) د$$

حيث :

- أ : يمثل تكلفة الأصل الثابت وقت الشراء (قبل الإستخدام)
- د : يمثل قيمة القسط الثابت للإهلاك حيث :

$$\text{قسط الإهلاك} = د = \frac{\text{تكلفة الآلة}}{\text{العمر الإنتاجي}}$$

- ن : تمثل السنة أو النقطة الزمنية المراد إيجاد القيمة الدفترية للأصل الثابت في بدايتها.

مثال (٤)

آلة تبلغ تكلفتها ٢٠٠٠٠ جنيه ، ويبلغ عمرها الإنتاجي (١٠) سنوات وبفرض إستهلاك هذه الآلة بطريقة القسط الثابت ، المطلوب إيجاد القيمة الدفترية للآلة فى بداية السنة السادسة.

الحــل

لإيجــاد قــيمة الآلة فى بداية السنة السادسة ، يمكننا إستخدام قواعد المتوالية العددية فى الحل ، حيث :

- تكلفة الآلة (٢٠٠٠٠ جنيه) تمثل الحد الأول للمتوالية
- قــيمة القســط الثابــت = د = $\frac{٢٠٠٠٠}{١٠}$ = ٢٠٠٠ جنــيه تمــثل أساس المتوالــية.أى أن المتوالية تتناقص بمقدار ثابت مقداره ٢٠٠٠ جنيه سنوياً ٠

وعلى ذلك فإن :

قيمة الآلة فى أول السنة السادسة

= الحد السادس فى المتوالية = $ح_٦$

= ٢٠٠٠٠ + (٦-١) × (-٢٠٠٠)

= ٢٠٠٠٠ + (٥ × - ٢٠٠٠)

= ٢٠٠٠٠ – ١٠٠٠٠ = ١٠٠٠٠ جنيه.

مثال (٥)

آلــة يبلغ ثمن شراؤها ٥٠٠٠٠ جنيه ، ويبلغ عمرها الإنتاجي (٢٠) ســنة ، ويفــرض إســتهلاك هذه الآلة بطريقة القسط الثابت على مدار العمر الإنتاجي ، المطلوب إيجاد القيمة الدفترية للآلة فى نهاية السنة العاشرة ؟.

الحــل

- القــيمة الدفترية للآلة فى نهاية السنة العاشرة هي نفسها القيمة الدفترية للآلة فى بداية السنة الحادية عشر ، وعلى ذلك فإن :

قيمة الآلة في نهاية السنة العاشرة = الحد الحادي عشر فى المتوالية = $ح_{١١}$

حيث :

- تكلفة الآلة (٥٠٠٠٠ جنيه) = أ
- قيمة القسط الثابت = د = $\frac{٥٠٠٠٠}{٢٠}$ = ٢٥٠٠ جنيه تمثل أساس المتوالية.أى أن المتوالية تتناقص بمقدار ثابت مقداره ٢٥٠٠ جنيه سنوياً .

وعلى ذلك فإن :

قيمة الآلة في نهاية السنة العاشرة = $ح_{١١}$=

= ٥٠٠٠٠ + (١١-١) × (-٢٥٠٠)

= ٥٠٠٠٠ + (١٠ × - ٢٥٠٠)

= ٥٠٠٠٠ - ٢٥٠٠٠ = ٢٥٠٠٠ جنيه.

ثانياً : تقدير عدد السكان :

يمكن استخدام قواعد المتواليات العددية في تقدير العدد المستقبلي للسكان ، وذلك بفرض أن السكان يتزايدون بمقدار ثابت بين فترة زمنية وأخرى ، وعلى ذلك يكون عدد السكان في نهاية أي سنة هو :

$$ح_ن = أ + (ن × د)$$

حيث :

- أ : يمثل عدد السكان في سنة الأساس .
- د : يمثل مقدار الزيادة السنوية في عدد السكان .
- ن : تمثل البعد الزمني بين السنة المراد تقدير عدد السكان فيها وسنة الأساس .

وفيما يلي أمثلة تطبيقية لتوضيح كيفية استخدام قواعد المتواليات العددية في تقدير عدد السكان في المستقبل عند التزايد بمقدار ثابت.

مثال (٦)

بفرض أن عدد السكان في عام ١٩٩٠م هو (١٠٠ مليون) نسمة ، وعــدد الســكان في عام ٢٠٠٠م هو (٢٥٠ مليون) نسمة ، المطلوب إيجاد عــدد الســكان التقديري في عام ٢٠١٠م ، وذلك بفرض أن السكان يتزايدون بمقدار ثابت سنوياً ؟.

الحــل

باعتبار أن سنة الأساس هي أول سنة متاح عنها بيانات وهي سنة ١٩٩٠م ، وعلى ذلك يكون :

- عدد السكان في سنة الأساس = أ = ١٠٠ مليون نسمة .
- الزيادة السنوية في السكان = د = $\frac{٢٥٠-١٠٠}{١٠}$ = ١٥ مليون نسمة
- البعد الزمني = ن = ٢٠١٠ – ١٩٩٠ = ٢٠ سنة .

وعلى ذلك فإن :

عدد السكان التقديري عام ٢٠١٠م = أ + (ن د)

= ١٠٠ + (٢٠ × ١٥)

= ١٠٠ + ٣٠٠

= ٤٠٠ مليون نسمة.

حــل آخر :

يمكــن حل هذا المثال باعتبار أن سنة الأساس هي سنة ٢٠٠٠م ، وعلى ذلك يكون :

- عدد السكان في سنة الأساس = أ = ٢٥٠ مليون نسمة .

- الزيادة السنوية في السكان = د = $\frac{٢٥٠-١٠٠}{١٠}$ = ١٥ مليون نسمة
- البعد الزمني = ن = ٢٠١٠ – ٢٠٠٠ = ١٠ سنوات .

وعلى ذلك فإن :

عدد السكان التقديري عام ٢٠١٠م = أ + (ن د)

= ٢٥٠ + (١٠ × ١٥)

= ٢٥٠ + ١٥٠ = ٤٠٠ مليون نسمة.

مثال (٧)

بفرض أن عدد السكان في عام ١٩٨٠م هو (١٠٠ مليون) نسمة ، وعدد السكان في عام ٢٠٠٠م هو (٢٠٠ مليون) نسمة ، المطلوب إيجاد عدد السكان التقديري في عام ٢٠٠٥م ، وذلك بفرض أن السكان يتزايدون بمقدار ثابت سنوياً ؟.

الحل

باعتبار أن سنة الأساس هي سنة ١٩٨٠م ، فإن :

- عدد السكان في سنة الأساس = أ = ١٠٠ مليون نسمة .
- الزيادة السنوية في السكان = د = $\frac{٢٠٠-١٠٠}{٢٠}$ = ٥ مليون نسمة
- البعد الزمني = ن = ٢٠٠٥ – ١٩٨٠ = ٢٥ سنة .

وعلى ذلك فإن :

عدد السكان التقديري عام ٢٠٠٥م = أ + (ن د)

= ١٠٠ + (٢٥ × ٥)

= ١٠٠ + ١٢٥ = ٢٢٥ مليون نسمة.

حـــل آخر :

يمكن حل هذا المثال أيضاً باعتبار أن سنة الأساس هي سنة ٢٠٠٠م ، وعلى ذلك يكون :

- عدد السكان في سنة الأساس = أ = ٢٠٠ مليون نسمة ٠
- الزيادة السنوية في السكان = د = $\frac{٢٠٠-١٠٠}{٢٠}$ = ٥ مليون نسمة
- البعد الزمني = ن = ٢٠٠٥ – ٢٠٠٠ = ٥ سنوات ٠

وعلى ذلك فإن :

عدد السكان التقديري عام ٢٠٠٥م = أ + (ن د)

= ٢٠٠ + (٥ × ٥)

= ٢٠٠ + ٢٥ = ٢٢٥ مليون نسمة.

ثالثاً : تطبيقات تجارية متنوعة :

تُســتخدم القواعد الأساسية للمتواليات العددية في العديد من الظواهر الحياتية للإنسان مثل الزيادة السنوية للمرتبات بمقدار ثابت ، الإدخارات بنسبة ثابتة من الدخول التي تتزايد بمقدار ثابت سنوياً أو شهرياً ، وهكذا يكون الحال بالنسبة للعديد من التطبيقات التجارية والإقتصادية التي نسوق منها التطبيقات العملية التالية :

التطبيق الأول :

موظــف بالحكومــة يبلغ دخله السنوى ١٠٠٠ جنيه ، ويزيد بمقدار ١٠٠ جنـــيه ســنوياً ، فإذا كان يدخر ١٠٪ من دخله السنوى . أوجد مجموع مدخراته فى نهاية ١٥ سنة ؟٠

الحـــل

من بيانات التطبيق يتضح أن الدخل السنوي للموظف يكون في الصورة :

١٠٠٠ ، ١١٠٠ ، ١٢٠٠ ، ١٣٠٠ ، ١٤٠٠ ، ١٥٠٠ ، ......

وعلى ذلك تكون مدخرات ذلك الموظف (والتي تمثل ١٠٪ سنوياً من الدخل) تكون في الصورة :

١٠٠ ، ١١٠ ، ١٢٠ ، ١٣٠ ، ١٤٠ ، ١٥٠ ، ......

وهي في صورة متوالية عددية فيها :

- الحد الأول = أ = ١٠٠
- أساس المتوالية = د = ١٠
- عدد حدود المتوالية = ن = ١٥

$$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{د}]$$

$$= \frac{١٥}{٢}[(٢ \times ١٠٠) + (١٤ \times ١٠)]$$

$$= ٧,٥\ (٢٠٠ + ١٤٠)$$

$$= ٧,٥ \times ٣٤٠ = ٢٥٥٠ \text{ جنيه}$$

حل آخر :

يمكن إيجاد المجموع بطريقة أخرى كما يلي:

الحد الخامس عشر (ل) = أ + (ن – ١) د

$$= ١٠٠ + (١٤ \times ١٠) = ١٠٠ + ١٤٠ = ٢٤٠$$

$$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{أ} + \text{ل})$$

$$= \frac{١٥}{٢}(١٠٠ + ٢٤٠) = ٧,٥ \times ٣٤٠ = ٢٥٥٠ \text{ جنيه}$$

التطبيق الثاني :

شخص مدين بمبلغ ٦٥٤٠ جنيه ، وتعهد بسداد هذا المبلغ على عدد معين من الأقساط الشهرية على أن يكون القسط الأول ١٠٠ جنيه ويتزايد بمقدار ١٥ جنيه شهرياً. أوجد عدد الأقساط التي يسددها المدين حتى يسدد دينه كاملاً ؟.

الحـــل

مــن بيانات التطبيق يتضح أن الأقساط الشهرية التي يسددها المدين تكون في الصورة :

١٠٠ ، ١١٥ ، ١٣٠ ، ١٤٥ ، ١٦٠ ، ١٧٥ ، ......

وهي في صورة متوالية عددية فيها :

- الحد الأول = أ = ١٠٠
- أساس المتوالية = د = ١٥
- مجموع المتوالية هو مبلغ الدين = $جـ_ن$ = ٦٥٤٠

ولإيجاد عدد الأقساط والذي يمثل عدد حدود المتوالية = ن ، نطبق العلاقة التالية :

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) د]$$

$$\therefore ٦٥٤٠ = \frac{ن}{٢} [(٢ \times ١٠٠) + (ن - ١) \times ١٥]$$

$$\therefore ٦٥٤٠ = \frac{ن}{٢} [٢٠٠ + ١٥ ن - ١٥]$$ ، وبالضرب × ٢

$$\therefore ١٣٠٨٠ = ن [٢٠٠ + ١٥ ن - ١٥]$$

$$\therefore ١٣٠٨٠ = ٢٠٠ن + ١٥ ن^٢ - ١٥ن$$

$$\therefore ١٣٠٨٠ = ١٨٥ ن + ١٥ ن^٢$$

$$\therefore ١٥ ن^٢ + ١٨٥ ن - ١٣٠٨٠ = صفر$$

وبالقسمة ÷ ٥ ، فإن :

∴ ٣ ن^{٢} +٣٧ ن − ٢٦١٦ = صفر

وهذه المعادلة هي معادلة من الدرجة الثانية ، ويمكن حلها بموجب القانون فنجد أن ثوابت القانون هي :

أ = + ٣ ، ب = + ٣٧ ، جـ = − ٢٦١٦

وبالتعويض عن قيم هذه الثوابت في القانون ، فإن :

$$ن = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$∴ ن = \frac{-(٣٧) \pm \sqrt{(٣٧)^{٢} - ٤(٣)(-٢٦١٦)}}{٢(٣)}$$

$$∴ ن = \frac{-٣٧ \pm \sqrt{١٣٦٩ + ٣١٣٩٢}}{٦}$$

$$∴ ن = \frac{-٣٧ \pm \sqrt{٣٢٧٦١}}{٦}$$

$$∴ ن = \frac{-٣٧ \pm ١٨١}{٦}$$

وحيث أن (ن) تمثل عدد الأقساط التي هي سداداً للدين ، فإن (ن) لابد وأن تكون موجبة ، وعلى ذلك فإن :

$$∴ ن = \frac{-٣٧ + ١٨١}{٦}$$

$$= \frac{١٤٤}{٦} = ٢٤ \text{ قسط .}$$

أي أن المدين سوف يسدد الدين بالكامل على الأقساط وبالصورة المحددة في التطبيق على ٢٤ شهر .

التطبيق الثالث :

أوجد المدة اللازمة لسداد قرض قيمته ٤٣٢ جنيه إذا كان الإتفاق يقضي بسداد ٢٥ جنيه فى الشهر الأول ، ٢٧ جنيه فى الشهر الثانى ، ٢٩ جنيه فى الشهر الثالث ، ... وهكذا بنفس التتابع حتى يتم سداد القرض بالكامل ، ثم أوجد قيمة قسط السداد الأخير المدفوع في آخر شهر ؟٠

الحل

من بيانات التطبيق يتضح أن الأقساط الشهرية التي يسددها المدين تكون في الصورة :

٢٥ ، ٢٧ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٣ ، ٣٥ ، ٠٠٠٠٠٠

وهي في صورة متوالية عددية فيها :

- الحد الأول = أ = ٢٥
- أساس المتوالية = د = ٢
- مجموع المتوالية هو مبلغ القرض = جـن = ٤٣٢

ونجد أن مدة السداد المطلوب إيجادها تتمثل في عدد الأقساط ، ولإيجاد عدد الأقساط والذي يمثل عدد حدود المتوالية = ن ، نطبق العلاقة التالية :

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) د]$$

$$\therefore ٤٣٢ = \frac{ن}{٢} [(٢ \times ٢٥) + (ن - ١) \times ٢]$$

$$\therefore ٤٣٢ = \frac{ن}{٢} [٥٠ + ٢ ن - ٢]$$ ، وبالضرب × ٢

$$\therefore ٨٦٤ = ن [٥٠ + ٢ ن - ٢]$$

∴ ٨٦٤ = ٥٠ ن +٢ ن^{٢} − ٢ ن

∴ ٨٦٤ = ٤٨ ن +٢ ن^{٢}

∴ ٢ ن^{٢} +٤٨ ن − ٨٦٤ = صفر

وبالقسمة ÷ ٢ ، فإن :

∴ ن^{٢} +٢٤ ن − ٤٣٢ = صفر

وهذه المعادلة هي معادلة من الدرجة الثانية ، ويمكن حلها بموجب القانون فنجد أن ثوابت القانون هي :

أ = + ١ ، ب = + ٢٤ ، جـ = − ٤٣٢

وبالتعويض عن قيم هذه الثوابت في القانون ، فإن :

$$ن = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

$$\therefore ن = \frac{-(٢٤) \pm \sqrt{(٢٤)^{٢} - ٤(١)(-٤٣٢)}}{٢(١)}$$

$$\therefore ن = \frac{-٢٤ \pm \sqrt{٥٧٦ + ١٧٢٨}}{٢}$$

$$\therefore ن = \frac{-٢٤ \pm \sqrt{٢٣٠٤}}{٢}$$

$$\therefore ن = \frac{-٢٤ \pm ٤٨}{٢}$$

وحيث أن (ن) تمثل المدة اللازمة لسداد القرض والتي هي عدد الأقساط ، فإن (ن) لابد وأن تكون موجبة ، وعلى ذلك فإن :

$$\therefore ن = \frac{-٢٤ + ٤٨}{٢} = \frac{٢٤}{٢} = ١٢$$ شهر .

أي أن القرض سوف يُسدد بالكامل على الأقساط وبالصورة المحددة في التطبيق على ١٢ شهر ٠

ومن ناحية أخرى نجد أن :

قيمة القسط الأخير = قيمة القسط الثاني عشر

∴ ل = أ + (ن - ١) د

= ٢٥ + (١٢-١) ×٢

= ٢٥ + (١١×٢)

= ٢٥ + ٢٢ = ٤٧ جنيه٠

التطبيق الرابع :

يمتلك عضو مجلس إدارة بإحدى الشركات ٩٠ سهماً ، فإذا سُمح لذلك العضو أن يــزيد إســتثماره إلى ١١٠ فى نهاية السنة الأولى ، ثم إلى ١٣٠ سهم فى نهاية السنة الثانية ، ثم إلى ١٥٠ سهم فى نهاية السنة الثالثة ، وهكذا بحيث لا يتجاوز إمتلاكه لعدد ٢٥٠ سهم ، والمطلوب لإيجاد عدد السنوات اللازم لكى يصل إستثمار ذلك العضو إلى الحد الأقصى ؟٠

الحــل

مــن بــيانات التطبيق يتضح أن الأسهم التي يُسمح للعضو بامتلاكها تكون في الصورة :

٩٠ ، ١١٠ ، ١٣٠ ، ١٥٠ ، ١٧٠ ، ١٩٠ ، ٠٠٠٠٠٠

وهي في صورة متوالية عددية فيها :

- الحد الأول = أ = ٩٠
- أساس المتوالية = د = ٢٠

- الحد الأخير = ل =الحد الأقصى لعدد الأسهم المسموح للعضو بامتلاكها = ٢٥٠ سهم

∴ ل = أ + (ن – ١) د

∴ ٢٥٠ = ٩٠ + (ن–١) ×٢٠

∴ ٢٥٠ = ٩٠ + ٢٠ ن – ٢٠

∴ ٢٥٠ = ٧٠ + ٢٠ ن

∴ ٢٥٠ – ٧٠ = ٢٠ ن

∴ ١٨٠ = ٢٠ ن

∴ ن = ٩ سنوات .

وعلـــى ذلــك نجـــد أن عضو مجلس الإدارة بهذا التطبيق سيصل إستثماره للحد الأقصـــى مـــن عدد الأسهم المسموح بامتلاكها.وهو ٢٥٠ سهم في نهاية السنة التاسعة ، أي بعد مدة ٩ سنوات .

التطبيق الخامس :

بـــدأ أحد المصانع الإنتاجية بإنتاج ٥٠٠ وحدة فى السنة الأولى من الإنتاج ، وتبيـــن من الخطة المستقبلية لمثل تلك المصانع أن الإنتاج يزيد بمقدار ١٠٠ وحدة سنوياً ، والمطلوب :

(١) تحديد الكمية التى ينتجها المصنع فى السنة الخامسة؟.

(٢) تحديد مجموع ما ينتجه المصنع فى الست سنوات الأولى ؟.

الحـــل

من بيانات التطبيق يتضح أن إنتاج المصنع بالوحدات يكون في الصورة :

٥٠٠ ، ٦٠٠ ، ٧٠٠ ، ٨٠٠ ، ......

وهي في صورة متوالية عددية فيها :

- الحد الأول = أ = ٥٠٠
- أساس المتوالية = د = ١٠٠

وعلى ذلك فإن :

(١) حجم الإنتاج في السنة الخامسة = ح٥

= أ +[(ن – ١) د]

= ٥٠٠ + [(٥–١) × ١٠٠]

= ٥٠٠ +(٤×١٠٠)

= ٥٠٠ + ٤٠٠ = ٩٠٠ وحدة إنتاج ٠

(٢) مجموع إنتاج المصنع في الست سنوات الأولى :

∵ جـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن – ١) د]

= $\frac{٦}{٢}$ [(٢ × ٥٠٠) +(٥ ×١٠٠)]

= ٣ (١٠٠٠ +٥٠٠)

= ٣ × ١٥٠٠ = ٤٥٠٠ وحدة إنتاج ٠

أو بطريقة أخرى :

يمكن إيجاد مجموع إنتاج المصنع في الست سنوات الأولى كما يلى:

الحد السادس = (ل) = أ + (ن – ١) د

= ٥٠٠ + (٥×١٠٠) = ٥٠٠ + ٥٠٠ = ١٠٠٠

∵ جـن= $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

= $\frac{٦}{٢}$ (٥٠٠ + ١٠٠٠) = ٣ × ١٥٠٠ = ٤٥٠٠ وحدة

التطبيق السادس :

بـــدأ مصـــنع الســـلام بإنتاج مليون وحدة إنتاج فى السنة الأولى ، ثم خفض إنتاجه بمقدار ١٠٠٠٠ وحدة تقريباً .

المطلوب :

(١) تحديد الكمية التى ينتجها المصنع فى السنة الخامسة؟.

(٢) تحديد مجموع ما ينتجه المصنع فى الست سنوات الأولى ؟.

الحـــل

من بيانات التطبيق يتضح أن إنتاج المصنع بالوحدات يكون في الصورة :

١٠٠٠٠٠٠ ، ٩٩٠٠٠٠ ، ٩٨٠٠٠٠ ، ٩٧٠٠٠٠ ، ......

وهي في صورة متوالية عددية فيها :

- الحد الأول = أ = ١٠٠٠٠٠٠
- أساس المتوالية = د = - ١٠٠٠٠

وعلى ذلك فإن :

(١) حجم الإنتاج في السنة الخامسة = $ح_٥$

= أ +[(ن - ١) د]

= ١٠٠٠٠٠٠ + [(٥-١) × - ١٠٠٠٠]

= ١٠٠٠٠٠٠ +(٤× - ١٠٠٠٠)

= ١٠٠٠٠٠٠ - ٤٠٠٠٠

= **٩٦٠٠٠٠** وحدة إنتاج .

(٢) مجموع إنتاج المصنع في الست سنوات الأولى :

∵ $جـ_ن$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن - ١) د]

= ٦/٢ [(٢ × ١٠٠٠٠٠٠) + (٥ × - ١٠٠٠٠)]

= ٣ (٢٠٠٠٠٠٠ - ٥٠٠٠٠)

= **٥٨٥٠٠٠٠** وحدة إنتاج ٠

أو بطريقة أخرى :

يمكن إيجاد مجموع إنتاج المصنع في الست سنوات الأولى كما يلى :

الحد السادس = (ل) = أ + (ن - ١) د

= ١٠٠٠٠٠٠ + (٥× - ١٠٠٠٠)

= ١٠٠٠٠٠٠ - ٥٠٠٠٠ = ٩٥٠٠٠٠

∵ جـن = ن/٢ (أ + ل)

= ٦/٢ (١٠٠٠٠٠٠ + ٩٥٠٠٠٠)

= ٣ × ١٩٥٠٠٠٠

= **٥٨٥٠٠٠٠** وحدة إنتاج ٠

(١-٢) المتوالية الهندسية :

تعرف المتواليات الهندسية بأنها مجموعة من الكميات المتتالية ، بحيث أن النسبة بين أى كمية منها غير الأولى والكمية السابقة لها مباشرة تساوى مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتوالية.

فمثلاً :

- مجموعة الأعداد ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٥٤ ، ....

  تكون متوالية هندسية أساسها (٣) .

- مجموعة الأعداد ١٢٨ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ....

  تكون متوالية هندسية أساسها $\frac{١}{٢}$

وبصفة عامة يمكن كتابة اى متوالية هندسية على الصورة:

أ ، أر ، أ$ر^{٢}$، أ$ر^{٣}$ ،.....

حيث (ر) أساس المتوالية الهندسية ، وقد تكون (ر) موجبة أو سالبة ، صحيحة أو كسرية.

الحد العام في المتوالية الهندسية :

في المتوالية الهندسية التي على الصورة:

أ ، أر ، أ$ر^{٢}$، أ$ر^{٣}$ ،..... نجد أن :

الحد الأول = أ

الحد الثانى= أر

الحد الثالث= أ$ر^{٢}$ ، الحد الرابع = أ$ر^{٣}$

وهكذا يكون الحد الذي رتبته (ن) في المتوالية الهندسية هو :

$$ح_{ن} = أ ر^{ن-١}$$

كيفية إيجاد مجموع المتوالية الهندسية :

يمكن إيجاد حاصل جمع (ن) من الحدود الأولى للمتوالية :

أ ، أر ، أ$ر^٢$ ، أ$ر^٣$ ،..... بإستخدام أحد القانونين الأتيين:

(١) $جـ_ن = أ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$ ؛ حيث (| ر | > ١)

(٢) $جـ_ن = أ \times \frac{١ - ر^ن}{١ - ر}$ ؛ حيث (| ر | < ١)

ويستخدم القانون الأول إذا كانت (ر) كقيمة مطلقة أكبر من الواحد الصحيح أما القانون الثانى فيستخدم إذا كانت (ر) كقيمة مطلقة أصغر من الواحد الصحيح.

مثال (١)

متوالية هندسية حدها الأول = ١٠ وأساسها = ٢ أوجد الحد الرابع.

الحـــل

$ح_٤ = أر^٣ = ١٠ \times ٢^٣ = ١٠ \times ٨ = ٨٠$

مثال (٢)

أوجد حاصل جمع المتوالية الهندسية التالية:

٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ..... إلى ٦ حدود.

الحـــل

الحد الأول = ٥ ، الأساس = $\frac{١٠}{٥} = ٢ > ١$

$\therefore جـ_ن = أ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$

$\therefore جـ_٦ = ٥ \times \frac{٢^٦ - ١}{٢ - ١} = ٥ \times \frac{٦٤ - ١}{١} = ٥ \times ٦٣ = ٣١٥$

مثال (٣)

أوجد حاصل جمع المتسلسلة الأتية:

٩ ، ٩٩ ، ٩٩٩ ، ....إلى (ن) من الحدود.

الحـــل :

$ج_{ن}$ = ٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ... إلى (ن) من الحدود.

= (١٠-١) + (١٠٠-١) + (١٠٠٠-١) + ... إلى (ن) من الحدود

= (١٠ + ١٠٠ + ١٠٠٠ + ... إلى (ن) من الحدود)

− (١ + ١ + ١ + ... إلى (ن) من الحدود)

$= ١٠ \times \frac{١٠^{ن} - ١}{١٠ - ١} - ن$

$= \frac{١٠}{٩} (١٠^{ن} - ١) - ن$

مثال (٤)

أوجد مجموع: ٧ + ٧٧ + ٧٧٧ + ... إلى (ن) من الحدود.

الحـــل :

$ج_{ن}$ = ٧ + ٧٧ + ٧٧٧ + ... إلى (ن) من الحدود.

$\therefore \frac{ج_{ن}}{٧}$ = ١ + ١١ + ١١١ + ... إلى (ن) من الحدود.

وبضرب الطرفين × ٩

$\therefore \frac{ج_{ن}}{٧} \times ٩$ = ٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ... إلى (ن) من الحدود.

$\therefore ج_{ن} \times \frac{٩}{٧} = \frac{١٠}{٩} (١٠^{ن} - ١) - ن$

$\therefore ج_{ن} = \frac{٧}{٩} \times \frac{١٠}{٩} (١٠^{ن} - ١) - ن = \frac{٧٠}{٨١} \times (١٠^{ن} - ١) - ن$

التطبيقات التجارية للمتواليات الهندسية:

تُستخدم المتواليات الهندسية في العديد من التطبيقات التجارية والإقتصادية ، ومن أهم التطبيقات العملية للمتواليات الهندسية إستهلاك الأصول الثابتة بمعدل ثابت والتنبؤ بزيادة عدد السكان بنسبة ثابتة وحساب جملة الإستثمارات بنظام الفائدة مركبة ، ولسوف نتناول فيما يلي أهم تلك التطبيقات .

(أولاً) إستهلاك الأصول الثابتة بطريقة القسط المتناقص :

إذا كانت تكلفة الأصل الثابت فى تاريخ الشراء هي (ك) ، وأن معدل إستهلاكه من قيمته الدفترية فى نهاية كل عام هو (ر) فإن :

القيمة الدفترية للأصل فى بداية السنة الثانية = $ك_٢$ = ك × $(١ - ر)^{٢-١}$

القيمة الدفترية للأصل فى بداية السنة الثالثة = $ك_٣$ = ك × $(١ - ر)^{٣-١}$.

القيمة الدفترية للأصل فى بداية السنة (ن) هي :

$$ك_ن = ك (١ - ر)^{ن-١}$$

التطبيق الأول :

آلة تبلغ قيمتها وقت الشراء ١٠٠٠٠٠ جنيه ، وقد تقرر إستهلاكها بطريقة القسط المتناقص بواقع ١٠٪ سنوياً من قيمتها تبعاً لتقديرها فى أول كل سنة. والمطلوب معرفة قيمة هذه الآلة فى أول السنة الخامسة؟ .

الحـــل

قيمة الآلة فى بداية السنة (ن) = $ك_ن$ = ك $(١ - ر)^{ن-١}$

∴ قيمة الآلة فى بداية السنة الخامسة = ١٠٠٠٠٠ $(١ - ٠,١)^{٥-١}$

= ١٠٠٠٠٠ $(٠,٩)^{٤}$ = ١٠٠٠٠٠ × ٠,٦٥٦١ = ٦٥٦١٠ جنيه.

التطبيق الثاني :

تُستهلك آلة بمعدل ثابت سنوياً من قيمتها الدفترية آخر كل سنة ، فإذا علمت أن المُستهلك آخر السنة الرابعة (٥٠٠ جنيه) ، وأن المُستهلك آخر السنة الخامسة (٤٠٠ جنيه) ، والمطلوب تحديد معدل الإستهلاك ؟ وكذلك تحديد ثمن شراء الآلة ؟.

الحـــل

إستهلاك السنة الرابعة =

= القيمة الدفترية في أول السنة الرابعة × معدل الإستهلاك

= ك × (١ − ر)^٤−١^ × ر

∴ ٥٠٠ = ك × (١ − ر)^٣^ × ر (١)

إستهلاك السنة الخامسة =

= القيمة الدفترية في أول السنة الخامسة × معدل الإستهلاك

= ك × (١ − ر)^٥−١^ × ر

∴ ٤٠٠ = ك × (١ − ر)^٤^ × ر (٢)

وبقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١) ينتج أن :

$$\frac{٤٠٠}{٥٠٠} = \frac{ك\,(١-ر)^{٤} \times ر}{ك\,(١-ر)^{٣} \times ر} \qquad \therefore\ (١-ر) = \frac{٤}{٥}$$

∴ معدل الإستهلاك = $ر = ١ - \frac{٤}{٥} = \frac{١}{٥} = ٠,٢ = ٢٠\%$ سنوياً

وبالتعويض في المعادلة (١) ، فإن :

∴ $٥٠٠ = ك \times (١ - ٠,٢)^{٣} \times ٠,٢ = ٠,١٠٢٤$ ك

∴ $ك = \frac{٥٠٠}{٠,١٠٢٤} = ٤٨٨٢,٨$ جنيه.

(ثانياً) تقدير عدد السكان عند تزايد السكان بمعدل ثابت :

إذا كان العدد الأصلى للسكان فى سنة الأساس هو (ك) وكان معدل زيادة السكان هو "ر" (حيث أن ر نسبة مئوية) فإن :

- عدد السكان بعد سنة واحدة = ك + ر ك = ك (١ + ر)
- وبعد سنتين يصبح عدد السكان: ك (١ + ر) + ر ك (١ + ر)

  = ك (١ + ر) [١ + ر]

  = ك (١ + ر)^{٢}
- وبعد ٣ سنوات يصبح عدد السكان:

  = ك (١+ر)^{٢} + ر ك (١+ر)^{٢} = ك (١+ر)^{٢} (١ +ر)

  = ك (١+ر)^{٣}
- وعلى هذا الأساس ، فإنه بعد (ن) من السنوات فإن عدد السكان المتنبأ ، ولنرمز له بالرمز (ك$_{ن}$) يصبح :

$$ك_{ن} = ك\,(١+ر)^{ن}$$

حيث :

- ك : يمثل عدد السكان في سنة الأساس ٠
- ر : يمثل معدل الزيادة السنوية في عدد السكان ، حيث :

$$ر = \left(\frac{ك_{ن}}{ك}\right)^{\frac{١}{ن}} - ١$$

- ن : تمثل البعد الزمني بين السنة المراد تقدير عدد السكان فيها وسنة الأساس ٠

وفيما يلي أمثلة تطبيقية لتوضيح كيفية استخدام قواعد المتواليات الهندسية في تقدير عدد السكان في المستقبل عند التزايد بمعدل ثابت ٠

التطبيق الثالث :

إذا كان عدد السكان فى إحدى الدول فى السنوات ١٩٨٩ ، ١٩٩٠ ، ١٩٩١ ،...... تكون متوالية هندسية اساسها ١,٠٤ وأن عدد السكان يساوى ٤٠ مليون نسمة فى عام ١٩٨٩ ، والمطلوب تقدير عدد السكان في سنة ١٩٩٩ ؟

الحــل

مــن بيانات هذا التطبيق يتضح أنه باعتبار سنة ١٩٨٩ سنة أساس ، فيكون :

ك = ٤٠ مليون نسمة.

ر = ٤٪ سنوياً .

ن = ١٩٩٩-١٩٨٩ = ١٠ سنوات.

∵ كن = ك (١+ر)^ن

∴ عدد السكان في سنة ١٩٩٩ = عدد السكان في سنة ١٩٨٩ (١+ر)^١٠

= ٤٠ × ١,٤٨٠٢٤

= ٥٩,٢١ مليون نسمة.

التطبيق الرابع :

إذا كان عدد السكان فى أحد المناطق سنة ١٩٩٠ = ٤٤ مليون نسمة ، وفى سنة ٢٠٠٠ = ٦٤ مليون نسمة.المطلوب :

(١) ما هو معدل الزيادة السنوية للسكان ؟

(٢) فى اى سنة سيصل عدد السكان إلى ١٠٤ مليون نسمة ؟

(٣) ما هو عدد السكان فى السنة ٢٠١٠م ؟

الحــل

مــن بيانات هذا التطبيق يتضح أنه باعتبار سنة ١٩٩٠ سنة أساس ، فيكون :

(١) ك = ٤٤ مليون نسمة٠

$ك_ن = ك_{١٠} = ٦٤$ مليون نسمة٠

$ر = \left(\frac{٦٤}{٤٤}\right)^{\frac{١}{١٠}} - ١ = ١,٠٣٨ - ١ = ٣,٨$ ٪ سنوياً ٠

(٢) تحديد السنة التي سيصل فيها عدد السكان إلى ١٠٤ مليون نسمة :

∵ $ك_ن = ك(١+ر)^ن$

وباعتبار أن سنة ١٩٩٠ هي سنة الأساس :

∴ عدد السكان في السنة المطلوبة= عدد السكان في سنة الأساس $(١+ر)^ن$

∴ $١٠٤ = ٤٤(١+٠,٠٣٨)^ن$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين :

∴ لو ١٠٤ = لو ٤٤ + ن لو (١+٠,٠٣٨)

∴ $ن = \frac{لو(١٠٤) - لو(٤٤)}{لو(١+٠,٠٣٨)}$

$= \frac{٢,٠١٧-١,٦٤}{٠,٠١٦٢} = ٢٣$ سنة

وعلى ذلك ، فإن عدد السكان سيصل إلى ١٠٤ مليون نسمة بعد ٢٣ سنة من عام ١٩٩٠، أي في عام ٢٠١٣م تقريباً ٠

ملحوظة :

يمكن أخذ سنة ٢٠٠٠ كسنة أساس لتحديد السنة المطلوبة ، فيكون :

١٠٤ = ٦٤ (١+٠,٠٣٨)^{ن}

وبأخذ لوغاريتم الطرفين :

∴ لو ١٠٤ = لو ٦٤ + ن لو (١+٠,٠٣٨)

∴ ن = $\frac{\text{لو (١٠٤) − لو (٦٤)}}{\text{لو (١+٠,٠٣٨)}}$

= $\frac{\text{٢,٠١٧−١,٨٠٦}}{\text{٠,٠١٦٢}}$ = ١٣ سنة تقريباً ٠

وعلى ذلك ، فإن عدد السكان سيصل إلى ١٠٤ مليون نسمة بعد ١٣ سنة من عام ٢٠٠٠، أي في عام ٢٠١٣م تقريباً ٠

(٣) تقدير عدد السكان في السنة ٢٠١٠م :

☒ باعتبار أن سنة ١٩٩٠ هي سنة الأساس :

∵ ك$_{ن}$ = ك (١+ر)^{ن}

∴ عدد السكان في سنة ٢٠١٠ = عدد السكان في سنة ١٩٩٠ (١+ر)^{٢٠}

= ٤٤ × (١+٠,٠٣٨)^{٢٠}

= ٩٢,٧٧ مليون نسمة٠

☒ باعتبار أن سنة ٢٠٠٠ هي سنة الأساس :

∴ عدد السكان في سنة ٢٠١٠ = عدد السكان في سنة ٢٠٠٠ (١+ر)^{١٠}

= ٦٤ × (١+٠,٠٣٨)^{١٠}

= ٩٢,٩ مليون نسمة٠

ثالثاً : تطبيقات تجارية متنوعة على المتواليات الهندسية :

تُستخدم القواعد الأساسية للمتواليات الهندسية في العديد من الظواهر الحياتية للإنسان كما هو الحال بالنسبة للإستثمارات أو الإدخار أو الإيداعات بالبنوك أو غير ذلك إذا كانت تلك البنود تتم في صورة متوالية هندسية ، وعلى ذلك يوجد العديد من التطبيقات التجارية والإقتصادية للمتواليات الهندسية التي نسوق منها التطبيقات العملية التالية :

التطبيق الأول :

تقدم شاب لخطبة إحدى الفتيات فطلب منه والدها مهراً لها بالشكل التالي :

أن يدفع قرشاً واحداً فى اليوم الأول من الشهر ، ثم يدفع قرشيْن فى اليوم الثانى ، ثم يدفع ٤ قروش فى اليوم الثالث ، ثم يدفع ٨ قروش فى اليوم الرابع ، وهكذا حتى يوم ٢٠ فى الشهر فيزف عليه الفتاة والمطلوب معرفة المهر المدفوع بالجنيهات ؟.

الحــل :

من بيانات التطبيق يتضح أن المهر بالقروش يكون في الصورة :

١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ......

وهي في صورة متوالية هندسية فيها :

- الحد الأول = أ = ١
- أساس المتوالية = ر = $\frac{٢}{١}$ = ٢ $\succ$ ١
- عدد حدود المتوالية = ن = ٢٠

$$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ} \times \frac{\text{ر}^{\text{ن}} - \text{١}}{\text{ر} - \text{١}}$$

$$\therefore \text{المهر المدفوع} = \text{جـ}_{\text{٢٠}} = \text{١} \times \frac{\text{٢}^{\text{٢٠}} - \text{١}}{\text{٢} - \text{١}}$$

$$= \text{١} \times \frac{\text{١٠٤٨٥٧٦} - \text{١}}{\text{١}}$$

= ١٠٤٨٥٧٥ قرش = ١٠٤٨٥,٧٥ جنيه .

التطبيق الثاني :

إذا كانت مصاريف الدعاية التى تنفقها إحدى الشركات سنوياً ٢٠٠٠٠ جنيه ، فإذا تقرر زيادة المصروفات بمقدار ٥ ٪ سنوياً كل عام عن العام الذى قبله فما مجموع مصاريف الإعلان خلال الخمس سنوات الأولى ؟

الحـــل :

من بيانات التطبيق يتضح أن مصاريف الدعاية تكون في الصورة :

٢٠٠٠٠ ، ٢٠٠٠٠ (١,٠٥) ، ٢٠٠٠٠ $(\text{١,٠٥})^{\text{٢}}$ ، ......

وهي في صورة متوالية هندسية فيها :

- الحد الأول = أ = ٢٠٠٠٠
- أساس المتوالية = ر = ١,٠٥ > ١

$$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \text{أ} \times \frac{\text{ر}^{\text{ن}} - \text{١}}{\text{ر} - \text{١}}$$

$$\therefore \text{مصاريف الخمس سنوات} = \text{جـ}_{\text{٥}} = \text{٢٠٠٠٠} \times \frac{(\text{١,٠٥})^{\text{٢٠}} - \text{١}}{(\text{١,٠٥}) - \text{١}}$$

$$= \text{٢٠٠٠٠} \times \frac{\text{١,٢٧٦٢٨١٦} - \text{١}}{\text{٠,٠٥}} = \text{١١٠٥١٢,٦٢ ج}$$

التطبيق الثالث :

يدخر شخص فى أحد البنوك ٤ جنيهات فى الشهر الأول ، ٨ جنيهات فى الشهر الثانى ، ١٦ جنيه فى الشهر الثالث ، وهكذا حتى نهاية سنة كاملة ، والمطلوب إيجاد مجموع ما يدخره فى نهاية سنة ؟٠

الحــل :

من بيانات التطبيق يتضح أن مدخرات الشخص تكون في الصورة :

٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٠٠٠٠٠٠ وهي في صورة متوالية هندسية فيها :

- الحد الأول = أ = ٤
- أساس المتوالية = ر = $\frac{١٦}{٨}$ = ٢ > ١

∵ $جـ_ن = أ \times \frac{ر^ن - ١}{ر - ١}$

∴ مجموع المدخرات في السنة = $جـ_{١٢} = ٤ \times \frac{٢^{١٢} - ١}{٢ - ١}$

$= ٤ \times \frac{٤٠٩٦ - ١}{٢ - ١}$

= ١٦٣٨٠ جنيه ٠

التطبيق الرابع :

إذا كانت مصاريف إحدى الشركات ١٢٠٠٠٠ جنيه سنوياً ، وقد وجد مجلس الإدارة أنه لابد من تخفيض المصروفات بمقدار ٥٪ فى كل عام عن العام السابق له لمدة ١٠ سنوات ، فما هى المصروفات التى تصرفها الشركة فى السنة العاشرة بعد هذا القرار ؟

الحــل :

من بيانات التطبيق يتضح أن مصروفات الشركة تكون في الصورة :

١٢٠٠٠٠ ، ١٢٠٠٠٠ (٠,٩٥) ، ١٢٠٠٠٠ (٠,٩٥)^{٢} ، ......

وهي في صورة متوالية هندسية فيها :

- الحد الأول = أ = ١٢٠٠٠٠
- أساس المتوالية = ر = ٠,٩٥ < ١

∵ ح$_{ن}$ = أ ر$^{ن-١}$

∴ مصروفات الشركة في السنة العاشرة = ح$_{١٠}$ = أ ر$^{١٠-١}$

= ١٢٠٠٠٠ × (٠,٩٥)^{٩}

= ٧٥٦٣٠ جنيه .

التطبيق الخامس :

يُراد توزيع مبلغ ٣٢٥٠ جنيه بين أربعة أشخاص على التوالي بحيث يحصل كل شخص على مبلغ يقل بمقدار الثلث عن الشخص الذي قبله ، والمطلوب استخدام قواعد المتواليات في تحديد نصيب كل شخص ؟

الحــل :

نفرض أن نصيب الشخص الأول = س

∴ نصيب كل شخص يعادل $\frac{٢}{٣}$ من نصيب الشخص السابق له ، وعلى ذلك تكون أنصبة الأشخاص على التوالي هي :

س ، $\frac{٢}{٣}$ س ، $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}$ س ، $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}$ س

وعلى ذلك ، فإن :

$$٣٢٥٠ = س + \frac{٢}{٣} س + \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} س + \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} س$$

$$= س \left\{ ١ + \frac{٢}{٣} + \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} + \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \right\}$$

= س (مجموع متوالية هندسية حدها الأول =١ وأساسها= $\frac{٢}{٣}$)

$$\therefore ٣٢٥٠ = س \left\{ أ \times \frac{١-ر^{ن}}{١-ر} \right\}$$

$$= س \left(١ \times \frac{١-\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤}}{١-\frac{٢}{٣}} \right)$$

$$= س \left(\frac{\frac{٦٥}{٨١}}{\frac{١}{٣}} \right) = س \left(\frac{٦٥}{٢٧}\right)$$

$$\therefore س = \frac{٣٢٥٠ \times ٢٧}{٦٥} = ١٣٥٠ \text{ جنيه}$$

وعلى ذلك يكون :

- نصيب الشخص الأول = س = ١٣٥٠ جنيه .
- نصيب الشخص الثاني = $\frac{٢}{٣}$ س = $\frac{٢}{٣}$ × ١٣٥٠ = ٩٠٠ جنيه .
- نصيب الشخص الثالث = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}$ س = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}$ × ١٣٥٠ = ٦٠٠ جنيه
- نصيب الشخص الرابع = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}$ س = $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}$ × ١٣٥٠ = ٤٠٠ جنيه

التطبيق السادس :

تقوم كلية بتوزيع جوائز على الخمس طلاب الأوائل على النحو التالي :

الجائزة الأولى	٩٩٩٩٩
الجائزة الثاني	٩٩٩٩
الجائزة الثالث	٩٩٩
الجائزة الرابع	٩٩
الجائزة الخامس	٩

المطلوب استخدام قواعد المتوالية الهندسية في إيجاد مجموع الجوائز ؟

الحـــل :

مجموع الجوائز = جـ = ٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + ٩٩٩٩٩

∴ جـ =(١٠-١)+(١٠٠-١)+(١٠٠٠-١)+...+(١٠٠٠٠٠-١)

= (١٠+١٠٠+١٠٠٠+...+١٠٠٠٠٠) - (١+١+١+١+١)

$$= \text{أ} \times \frac{\text{ر}^{\text{ن}} - ١}{\text{ر} - ١} - ٥$$

$$= ١٠ \times \frac{١٠^{٥} - ١}{١٠ - ١} - ٥ = ١١١١,٥$$

∴ مجموع الجوائز = جـ = ١١١١,٥ جنيه.

التطبيق السابع :

تقوم شركة بتوزيع المبالغ التالية على ٦ مستويات أداء على النحو التالي :

المستوى الأول	٧٧٧٧٧٧
المستوى الثاني	٧٧٧٧٧
المستوى الثالث	٧٧٧٧

المستوى الرابع ٧٧٧

المستوى الخامس ٧٧

المستوى السادس ٧

المطلوب استخدام قواعد المتوالية الهندسية في إيجاد مجموع المبالغ ؟

الحـــل :

جـ = ٧ + ٧٧ + ٧٧٧ + ٧٧٧٧ + ٧٧٧٧٧ + ٧٧٧٧٧٧

بقسمة الطرفين ÷ ٧

$\therefore \frac{\text{جـ}}{٧}$ = ١ + ١١ + ١١١ + ١١١١ + ١١١١١ + ١١١١١١

وبضرب الطرفين × ٩

$\therefore \frac{\text{جـ}}{٧} \times ٩$ = ٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + ٩٩٩٩٩ + ٩٩٩٩٩٩

$\therefore \text{جـ} \times \frac{٩}{٧}$ = (١٠-١)+(١٠٠-١)+(١٠٠٠-١)+..+(١٠٠٠٠٠٠-١)

= (١٠+١٠٠+١٠٠٠+..+١٠٠٠٠٠٠) - (١+١+١+١+١+١)

$= \text{أ} \times \frac{\text{ر}^{\text{ن}}-١}{\text{ر}-١} - ٦ = ١٠ \times \frac{١٠^{٦}-١}{١٠-١} - ٦ = ١١١١١,٤$

$\therefore$ مجموع المبالغ = جـ = ١١١١١,٤ × $\frac{٧}{٩}$ = ٨٦٤١٩٢ جنيه.

(١-٣) المتوالية الهندسية اللانهائية :

يقال لمتوالية هندسية انها لا نهائية إذا لم يكن عدد حدودها محدوداً ويقال انها تنازلية إذا كان أساسها أصغر عددياً من الواحد الصحيح ، أى $|ر| < ١$.

ويمكن القول أن مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية التنازلية التى حدها الأول (أ) وأساسها (ر) هو :

$$ح_{\infty} = أ \times \frac{١}{١ - ر}$$

مثال (١)

أوجد مجموع : $١ + ١,٠٥^{-١} + ١,٠٥^{-٢} + \dots$ إلى مالانهاية

الحـــل :

هذه متوالية هندسية لا نهائية أساسها بحيث :

أساس المتوالية الهندسية $= ١,٠٥^{-١} = \frac{١}{١,٠٥}$

وحيث أن :

$$ح_{\infty} = أ \times \frac{١}{١ - ر}$$

$$\therefore ح_{\infty} = ١ \times \frac{١}{١ - \frac{١}{١,٠٥}}$$

$$= \frac{١,٠٥}{٠,٠٥}$$

$$= ٢١$$

مثال (٢)

أوجد قيمة الكسر العشرى الدائرى ($\overline{٣}$٠,٣٣٣٣٣)

الحـــل

$\overline{٣}$٠,٣٣٣٣٣ = ٠,٣ +٠,٠٣ +٠,٠٠٣ +٠,٠٠٠٣ +.. ∞

= ٠,٣ (١ + ٠,١ + ٠,٠١ + ٠,٠٠١ + ... ∞).

= ٠,٣ (مجموع متوالية هندسية لا نهائية تنازلية حدها الأول أ = ١ وأساسها ر = ٠,١).

∴ $\overline{٣}$٠,٣٣٣٣٣= ٠,٣ (١ × $\frac{١}{١-٠,٠١}$)

= ٠,٣ $\left(\frac{١}{٠,٩}\right)$ = $\frac{٠,٣}{٠,٩}$ = $\frac{١}{٣}$

مثال (٣)

ضع الكسر العشرى $\overline{٤٣}$٠,٤٣٤٣٤٣فى صورة كسر إعتيادى

الحـــل

$\overline{٤٣}$٠,٤٣٤٣٤٣= ٠,٤٣+٠,٠٠٤٣+٠,٠٠٠٠٤٣+...إلى مالا نهاية

= ٠,٤٣ (١+٠,٠١+٠,٠٠٠١+ .....إلى مالا نهاية)

= ٠,٤٣ (مجموع متوالية هنسية حدها الأول ١وأساسها ٠,٠١).

= ٠,٤٣ (١ × $\frac{١}{١-٠,٠١}$)

= ٠,٤٣ × $\frac{١}{٠,٩٩}$

= $\frac{٤٣}{٩٩}$

تطبيقات تجارية على المتواليات الهندسية اللانهائية التنازلية :

نورد فيما يلي بعض التطبيقات التجارية والعملية للمتواليات الهندسية اللانهائية التنازلية (التي تكون فيها ر قيمة سالبة)

التطبيق الأول :

إذا كان إنتاج منجم من مناجم الفحم ينقص سنوياً بمقدار ٢٥٪ من إنتاجه فى السنة السابقة ، فإذا كان حجم إنتاج هذا المنجم فى إحدى السنوات هو ٢٥٠٠٠ وحدة ، فما هو مجموع إنتاج هذا المنجم فى مستقبل حياته الإنتاجية؟

الحـــل :

من بيانات التطبيق يتضح أن إنتاج منجم الفحم يكون في الصورة :

٢٥٠٠٠ ، ٢٥٠٠٠ (٠,٧٥) ، ٢٥٠٠٠ $(٠,٧٥)^{٢}$ ، ......

وهي في صورة متوالية هندسية لانهائية تنازلية ، فيها :

- الحد الأول = أ = ٢٥٠٠٠
- أساس المتوالية = ر = ٠,٧٥

∴ مجموع إنتاج المنجم طوال حياته الإنتاجية المستقبلية

= مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية التنازلية

$$= حـ_{\infty} = أ \times \frac{١}{١ - ر}$$

$$= ٢٥٠٠٠ \times \frac{١}{١ - ٠,٧٥}$$

= ١٠٠٠٠٠ وحدة .

التطبيق الثاني :

(أ) إذا كانت نسبة الأمية في إحدى القرى التابعة لمركز بلقاس بمحافظة الدقهلية هي ٠,٣٥٣٥٣٥٣٥ أوجد عدد الأميين وعدد سكان القرية بالألف ؟.

الحل :

نفرض أن : س = نسبة الأمية

∴ س = ٠,٣٥٣٥٣٥٣٥

= ٠,٣٥+٠,٠٠٣٥+٠,٠٠٠٠٣٥+...إلى مالا نهاية

= ٠,٣٥ (١+٠,٠١+٠,٠٠٠١+ .....إلى مالا نهاية)

= ٠,٣٥ (مجموع متوالية هنسية حدها الأول ١وأساسها ٠,٠١).

= ٠,٣٥ × حـ$_\infty$ = ٠,٣٥ (١ × $\frac{١}{١-٠,٠١}$)

= ٠,٣٥ × $\frac{١}{٠,٩٩}$ = $\frac{٣٥}{٩٩}$

∴ عدد الأميين في القرية بالألف = ٣٥٠٠٠ نسمة .

عدد سكان القرية بالألف = ٩٩٠٠٠ نسمة .

حل آخر :

∴ س = ٠,٣٥٣٥٣٥٣٥ (١) بضرب الطرفين × ١٠٠

∴ ١٠٠ س = ٣٥,٣٥٣٥٣٥٣٥ (٢)

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢)

∴ ٩٩ س = ٣٥

∴ س = $\frac{٣٥}{٩٩}$

ومن ثم نصل لنفس النتائج السابقة .

التطبيق الثالث :

(أ) قامت إحدى الشركات الصناعية بتوزيع أرباح على حملة الأسهم فبلغ الربح الموزع للسهم الواحد ١,٤٦٥٦٥ $\overline{\text{٦٥}}$ ، والمطلوب إيجاد الأرباح الموزعة وعدد أسهم الشركة بالألف ، ولإذا علمت أن الأرباح الموزعة تمثل ٩٥٪ من صافي الربح أوجد صافي الربح ؟٠

الحـل :

نفرض أن : س = نصيب السهم الواحد من الأرباح

∴ س = ١,٤٦٥٦٥ $\overline{\text{٦٥}}$

= ١,٤ +٠,٠٦٥+٠,٠٠٠٦٥+...إلى مالا نهاية

= ١,٤ +٠,٠٦٥ (١+٠,٠١+٠,٠٠٠١+ .....إلى مالا نهاية)

= ١,٤+٠,٠٦٥(مجموع متوالية هنسية حدها الأول ١وأساسها ٠,٠١)

= ١,٤ + (٠,٠٦٥ × حـ$_\infty$)

= $\text{١,٤} + \text{٠,٠٦٥} \left(\text{١} \times \frac{\text{١}}{\text{١}-\text{٠,٠١}}\right)$

= $\text{١,٤} + \left(\text{٠,٠٦٥} \times \frac{\text{١}}{\text{٠,٩٩}}\right)$

= $\text{١,٤} + \frac{\text{٠,٠٦٥}}{\text{٠,٩٩}}$

= $\frac{\text{١,٤٥١}}{\text{٠,٩٩}}$

= $\frac{\text{١٤٥١}}{\text{٩٩٠}}$

∴ الأرباح الموزعة = ١٤٥١٠٠٠ جنيه ٠

عدد الأسهم = ٩٩٠٠٠٠ سهم ٠

ولتحديد إجمالى صافي أرباح الشركة ، نفرض أن :

- س تمثل صافي الأرباح تمثل ١ من صافي الربح
- ١٤٥١٠٠٠ تمثل ٩٥٪ من صافي الربح

∴ صافي الأرباح الكلي = س = $\frac{١٤٥١٠٠٠ \times ١}{٠,٩٥}$ = **١٥٢٧٣٨٦,٤** جنيه

حل آخر :

نفرض أن :

س = ١,٤٦٥٦٥ $\overline{٦٥}$ (١)

بضرب طرفي المعادلة (١) × ١٠٠٠

∴ ١٠٠٠ س = ١٤٦٥,٦٥٦٥ $\overline{٦٥}$ (٢)

بضرب طرفي المعادلة (١) × ١٠

∴ ١٠ س = ١٤,٦٥٦٥ $\overline{٦٥}$ (٣)

بطرح المعادلة (٣) من المعادلة (٢) :

∴ ٩٩٠ س = ١٤٥١

∴ س = $\frac{١٤٥١}{٩٩٠}$

ومن ثم نصل لنفس النتائج السابقة .

تمارين الفصل الأول

(١) موظف دخله السنوى ١٠٠٠٠ جنيه ويزيد دخله بمقدار ١٠٠٠ جنيه سنوياً ، فإذا كان يدخر ٢٠ ٪ من دخله السنوى. أوجد مجموع مدخراته فى نهاية ٢٠ سنة.

(٢) شخص مدين بمبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه تعهد بسداد هذا المبلغ على عدد معين من الأقساط الشهرية ، على أن يكون القسط الأول ٥٠٠ جنيه ويتزايد بمقدار ٧٥ جنيه شهرياً. أوجد عدد الأقساط اللازمة لسداد الدين بالكامل ؟.

(٣) إذا سمح لعضو مجلس إدارة إحدى الشركات الذى يمتلك ١٨٠ سهماً أن يزيد إستثماره إلى ٢٢٠ فى نهاية السنة الأولى ثم إلى ٢٦٠ فى نهاية السنة الثانية ثم إلى ٣٠٠ فى نهاية السنة الثالثة وهكذا بحيث لا يتجاوز إمتلاكه ٥٠٠ سهماً. أوجد عدد السنوات اللازمة لكى يصل إستثماره إلى الحد الأقصى؟.

(٤) أوجد عدد الأقساط اللازمة لسداد دين قدره ٢٩٠٠٠ جنيه إذا كان نظام السداد يقضي بسداد هذا الدين على أقساط شهرية ، على أن يكون القسط الأول ٥٠٠ جنيه ويتزايد بمقدار ١٠٠ جنيه شهرياً إلى أن يتم سداد الدين بالكامل ؟.

(٥) أوجد المدة اللازمة لسداد قرض قيمته ٧١٥٠٠ جنيه إذا سدد منه ١٠٠ جنيه فى نهاية الأسبوع الأول ، ١٥٠ جنيه فى نهاية الأسبوع الثانى ، ٢٠٠ جنيه فى نهاية الأسبوع الثالث ، ... وهكذا.

(٦) يدخر شخص فى أحد البنوك ٦ جنيهات فى الشهر الأول ، ١٢ جنيه فى الشهر الثانى ، ٢٤ جنيه فى الشهر الثالث ، وهكذا حتى نهاية سنة كاملة. أوجد مجموع ما يدخره الشخص فى نهاية سنة؟.

(٧) تستهلك شركة آلات مصانعها على أساس القسط الثابت فإذا كانت تكلفة إحدى الآلات ٥٠٠٠٠ جنيه ويقدر عمرها الإنتاجى بـ ١٠ سنوات ، أوجد القيمة الدفترية للآله فى بداية السنة السادسة ؟.

(٨) بدأت إحدى الشركات بإنتاج ٧٠٠ وحدة فى السنة الأولى من بداية حياتها الإنتاجية ، ثم أنتجت ١٥٠٠ وحدة في السنة الخامسة حيث يزيد إنتاجها بمقدار ثابت سنوياً. المطلوب :

أ) ما هى كمية الزيادة السنوية في الإنتاج؟

ب) فى اى سنة سيصل إنتاج الشركة إلى ٢١٠٠ وحدة ؟

ت) ما هى كمية الإنتاج فى العشر سنوات الأولى؟

(٩) تُستهلك آلة بمعدل ١٠٪ كل سنة من قيمتها الدفترية فى نهاية كل سنة. فإذا علمت أن ثمن هذه الآلة وقت شرائها كان ٦٠٠٠ جنيه. فما قيمتها فى أول السنة الخامسة؟

(١٠) تُستهلك آلة بمعدل ١٠٪ كل سنة من قيمتها الدفترية فى نهاية كل سنة. فإذا علمت أن المستهلك من هذه الآلة في نهاية السنة الثالثة ٤٠٠ جنيه. وفي نهاية السنة الرابعة ٣٠٠ جنيه. المطلوب :

(أ) معدل إستهلاك الآلة ؟

(ب) ثمن شراء الآلة ؟

(١١) إذا علمت أن عدد سكان مدينة ما قد زاد من ١٠٠٠٠ نسمة إلى ١٤٦٤١ نسمة خلال خمس سنواتطبقاً لتوالي هندسي ، فما هو معدل الزيادة السكانية ، وكم سيكون عدد سكان تلك القرية بعد ٥ سنوات قادمة ؟

(١٢) إذا كان إنتاج منجم من مناجم الذهب ينقص سنوياً بمقدار ٢٠٪ من إنتاجه فى السنة السابقة فإذا كان قيمة إنتاجه فى إحدى السنوات هو ٥٠٠٠٠٠ جنيه فما هو مجموع قيمة إنتاج هذا المنجم فى مستقبل حياته الإنتاجية ؟

(١٣) إذا كانت نسبة الإناث في إحدى القرى التابعة لمركز المنصورة بمحافظة الدقهلية هي ٠,٤٣٤٣٤٣$\overline{٤٣}$ أوجد عدد الإناث وعدد سكان القرية بالألف ؟.

(١٤) قامت إحدى الشركات الصناعية بتوزيع أرباح على حملة الأسهم فبلغ الربح الموزع للسهم الواحد ٢,٦٤٥٤٥$\overline{٤٥}$ ، والمطلوب إيجاد الأرباح الموزعة وعدد أسهم الشركة بالألف ، ولإذا علمت أن الأرباح الموزعة تمثل ٨٥٪ من صافي الربح أوجد صافي الربح ؟.

(١٥) إذا كان عدد السكان فى أحد المناطق سنة ١٩٧٠ = ٣٠ مليون نسمة ، وفى سنة ١٩٨٠ = ٣٥ مليون نسمة.

(أ) ما هى كمية الزيادة السنوية للسكان؟

(ب) فى اى سنة سيصل عدد السكان إلى ٤٥ مليون نسمة؟

(ج)ما هو عدد السكان فى السنة ١٩٩٠؟

(١٦) إذا كانت مصاريف الدعاية التى تنفقها إحدى الشركات سنوياً ٤٠٠٠٠ جنيه ، فإذا تقرر زيادة المصراوفات بمقدار ٤ ٪ سنوياً كل عام عن العام الذى قبله فما مجموع مصاريف الإعلان خلال العشر سنوات الأولى ؟

(١٧) إذا كان عدد السكان فى إحدى الدول فى السنوات ٢٠٠٠ ، ٢٠٠١ ، ٢٠٠٢ ،...... تكون متوالية هندسية اساسها ١,٠٣ وأن عدد السكان يساوى ٣٠ مليون نسمة فى عام ٢٠٠٠. فكم يكون العدد سنة ٢٠١٥م ؟

(١٨) عين أحد الأشخاص فى وظيفة بمرتب ٢٠٠٠ جنيه سنوياً بزيادة قدرها ١٠٪ من مرتبه كل سنتين عن المرتب السابق . ما هو مرتبه السنوى عندما يقضى ١٠ سنوات فى الخدمة ؟

(١٩) فواحة حجمها قدم مكعب مليئة بأحد الزيوت العطرية ، وقد وجد أنه يتبخر من هذا العطر $\frac{١}{١٠}$ من محتوياتها كل دقيقة ، أوجد حجم العطر بتلك الفواحة بعد مرور $\frac{١}{٤}$ ساعة ؟.

(٢٠) في التمرين السابق المطلوب تحديد متى تفرغ الفواحة تماماً من العطر ؟.

(٢١) تقوم شركة بتوزيع جوائز على الفائزين في مسابقة أجرتها خلال عام ٢٠٠٠/٢٠٠١م وكانت الجوائز على النحو التالي :

٧٧٧٧٧٧ ، ٧٧٧٧٧ ، ٧٧٧٧ ، ٧٧٧ ، ٧٧ ، ٧

المطلوب استخدام قواعد المتوالية الهندسية في إيجاد مجموع الجوائز ؟

(٢٢) تقوم شركة بتوزيع مجموعة من الجوائز على المدراء خلال عام ٢٠٠١/٢٠٠٢م حسب مستويات الأداء وهي على النحو التالي :

٦٦٦٦٦٦٦ ، ٦٦٦٦٦٦ ، ٦٦٦٦٦ ، ٦٦٦٦ ، ٦٦٦ ، ٦٦ ، ٦

المطلوب استخدام قواعد المتوالية الهندسية في إيجاد مجموع الجوائز ؟

(٢٣) إستأجر شخص أحد المباني لمدة ٢٠ سنة بشرط زيادة الإيجار بمقدار ٥٠ جنيه سنوياً ، فإذا كان إجمالي الإيجار المدفوع في مدة الإيجار بالكامل هو ١٩٥٠٠ جنيه ، فاوجد قيمة الإيجار المدفوع في كل من السنتين الأولى والأخيرة ؟.

الفصل الثاني

المعادلات الخطية

وتطبيقاتها التجارية

- ☼ مقدمة ٠
- ☼ صورة معادلة الخط المستقيم والشكل البياني لها
- ☼ البعد بين نقطتين وميل الخط المستقيم ٠
- ☼ التمثيل البيانى لمعادلة الخط المستقيم ٠
- ☼ إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطتين
- ☼ معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل ونقطة
- ☼ تقدير معادلة الخط المستقيم بطريقة المربعات الصغرى
- ☼ القيم التقديرية والخطأ المعيارى للتقدير
- ☼ تطبيقات تجارية متنوعة على معادلة الخط المستقيم

(٢-١) مقدمة :

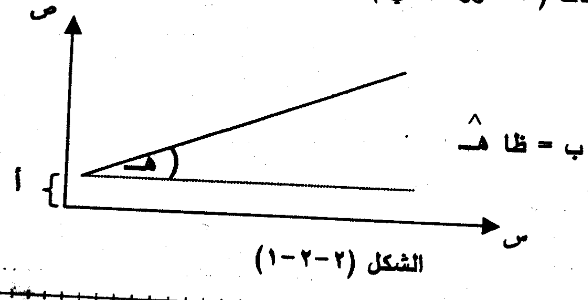
تلعب معادلة الخط المستقيم دوراً بارزاً في شتى المجالات التطبيقية ، فقد أظهر التحليل الإقتصادي أن معظم الظواهر والتغيرات الإقتصادية تأخذ الإتجاه الخطي على الأقل في الأجل القصير ، ولذلك كان الإهتمام بكيفية تقدير معادلة الخط المستقيم لما لها من مكانة ودور بارزين في التطبيقات التجارية المختلفة .

(٢-٢) صورة معادلة الخط المستقيم والشكل البياني لها :

تأخذ معادلة الخط المستقيم الصورة التالية :

ص = أ + ب س

ويُقال في مثل هذه الحالة أن (ص) متغيراً تابعاً ، وأن (س) متغيراً مستقلاً ، حيث تتوقف قيمة المتغير التابع (ص) على قيمة المتغير المستقل (س) ، وتشير قيمة المقدار الثابت (أ) إلى الجزء الذي يقطعه الخط المستقيم من المحور الصادي (الرأسي) أما قيمة المقدار الثابت (ب) فتشير إلى ميل الخط المستقيم على المحور السيني (الأفقي) وهو يمثل ظل الزاوية التي يصنعها الخط المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات (المحور الأفقي) كما في الشكل (٢-٢-١) التالي :



الشكل (٢-٢-١)

ويمكننا القول أن قيمة الثابت (أ) هي قيمة المتغير التابع (ص) عندما تكون قيمة المتغير المستقل (س) تعادل الصفر ، أي أن :

ص = أ ، عند : س = صفر

كما أن قيمة الثابت (ب) يمثل مقدار التغير في قيمة المتغير التابع (ص) عندما تتغير قيمة المتغير المستقل (س) بمقدار وحدة واحدة وبحسب طبيعة العلاقة بين المتغيرين (س ، ص) وهل هي طردية أم عكسية .

مثال (١)

بفرض أن أ = ١٠ ، ب = ٢ ، تكون معادلة الخط المستقيم:

ص = ١٠ + ٢ ب

- وعند : س = صفر ، فإن : ص = ١٠ + (٢×صفر) = ١٠

أي أن قيمة (ص) = قيمة الثابت (أ) عند : س= صفر

- وعند : س = ٢٠ ، فإن : ص = ١٠ + (٢×٢٠) = ٥٠
- وإذا زادت قيمة (س) بمقدار واحد صحيح ، أي عند س = ٢١ ، فإن : ص = ١٠ + (٢×٢١) = ٥٢

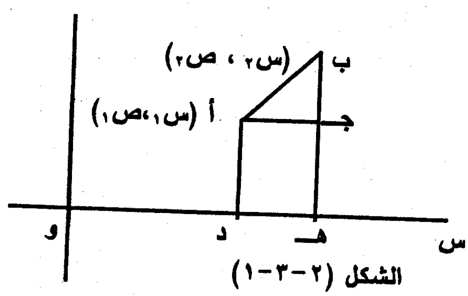
أي أن قيمة (ص) قد زادت بمقدار ٢ (مقدار الثابت ب) عندما زادت قيمة (س) بمقدار واحد صحيح

- وإذا إنخفضت قيمة (س) بمقدار واحد صحيح ، أي عند س = ١٩ فإن : ص = ١٠ + (٢×١٩) = ٤٨

أي أن قيمة (ص) قد إنخفضت بمقدار ٢ (مقدار الثابت ب) عندما إنخفضت قيمة (س) بمقدار واحد صحيح

(٢-٣) البعد بين نقطتين وميل الخط المستقيم :

إذا كانت النقطتان أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$ معلوم إحداثياتها كما في الشكل (٢-٣-١) وكان المطلوب هو الطول $\overline{أب}$ ، نسقط الأعمدة أ د ، ب هـ على المحور السينى ، أ جـ على المحور الصادى كما يلي :



الشكل (٢-٣-١)

من الشكل يتضح أن :

$\because$ و د $= س_1$ ، و هـ $= س_2$

$\therefore$ جـ أ = هـ د

$= س_2 - س_1$

$\because$ ب هـ $= ص_2$ ، أ د $= ص_1$

$\therefore$ ب جـ = ب هـ - أ د

$= ص_2 - ص_1$

وحيث أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية :

$$\therefore \overline{أب}^2 = \overline{أجـ}^2 + \overline{بجـ}^2$$

$$\therefore \overline{أب}^2 = (س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2$$

$$\therefore \overline{أب} = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

ميل الخط المستقيم :

ميـل الخـط المستقيم هو عبارة عن ظل الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات ، فمن الشكل السابق نجد أن :

$$\therefore \text{ميل المستقيم } \overline{\text{أ ب}} = \text{ظا}(\text{ب أ جـ}) = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

مثال (٢)

إذا كانت النقطتان أ ، ب هما : أ (-١ ، ٣) ، ب (٤ ، ١٥).

أوجد :

المسافة بين النقطتين أ ، ب ؟

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين أ ، ب ؟

الحـــل:

يمكن تحديد النقتطين السابقتين كما يلى:

$$(\text{س}_1 \text{ ، ص}_1) = (-1 \text{ ، } 3)$$

$$(\text{س}_2 \text{ ، ص}_2) = (4 \text{ ، } 15)$$

وعلى ذلك ، تكون المسافة بين أ ، ب ، أى طول المستقيم $\overline{\text{أ ب}}$ هو :

$$\therefore \overline{\text{أ ب}} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

$$\therefore \overline{\text{أ ب}} = \sqrt{(4-(-1))^2 + (15-3)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\therefore \text{ميل المستقيم } \overline{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$\therefore \text{م} = \frac{15-3}{4-(-1)} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

ومن الدراسة السابقة يتضح أن :

☐ الخـط المسـتقيم عبارة عن مجموعة من النقاط على مستوى واحد لهـا قـيم مختلفة (س ، ص) ويمكن تمثيلها بيانياً بالنسبة للمحورين السـينى والصادي بحيث أن جميع هذه النقاط تكون خاضعة لمعادلة في الصورة :

ص = أ + ب س

حيث أن كلاً من س ، ص ، هى عبارة عن قيمة متغيرة تتوقف قيم أحدهما على قيم الأخرى ٠

☐ يلاحظ أن قيم الثوابت أ ، ب ، هى التى تحدد موضع الخط المستقيم من نقطة الأصل ومن المحورين السينى والصادى ، فإذا كان الخط المستقيم موازياً لأحد المحورين السينى أوالصادى فإنه يمكن إختصار المعادلة السابقة ، حيث :

☒ إذا كان الخط المستقيم موازياً للمحور الصادى فإن المعادلة تكون:

س = أ

حيـث أن "أ" قـيمة ثابـتة ، ومعنى ذلك أن قيمة المتغير "ص" لا تدخـل فـى تحديد موضع الخط المستقيم أو شكله ، أى أن هذا الخط المستقيم يبعد مقداراً ثابتاً قدره (أ)عن المحور الصادي مهما كانت قيم المتغير (ص).

☒ إذا كان الخط المستقيم موازياً للمحور السينى فإن المعادلة تكون:

ص = ب

حيث ان "ب" قيمة ثابتة ، ومعنى ذلك أيضاً أن قيم المتغير "س" لا تؤثـر على موضع أو شكل المستقيم ، وأن هذا المستقيم يبعد مقداراً قدره (ب) عن المحور السينى مهما كانت قيم المتغير (س).

(٢-٤) التمثيل البياني لمعادلة الخط المستقيم :

التمثيل البيانى للمعادلة (فى متغيرين س ، ص مثلاً) أو الرسم البيانى لها هو مجموعة النقاط التى تحقق إحداثياتها المعادلة الممثلة بيانياً. ولتمثيل معادلة الخط المستقيم يُفضل للتسهيل وضع هذه المعادلة على الصورة :

ص = أ + ب س

ثم نفترض مجموعة من القيم للمتغير المستقل (س) ، وبالتالي نوجد مجموعة القيم المناظرة للمتغير التابع (ص)، وبتمثيل هذه القيم بيانياً وتوصيل ما بينها بخط مستقيم فيكون الخط الناتج هو التمثيل البياني لمعادلة الخط المستقيم : ص = أ + ب س

ويُلاحظ أنه من الأفضل أن تكون مجموعة القيم المُفترضة للمتغير المستقل (س) متنوعة ما بين القيم السالبة والصفر والقيم الموجبة، والمثال التالي يوضح كيفية التمثيل البياني لمعادلة الخط المستقيم.

مثال (٣)

المطلوب التمثيل البياني للمعادلة:

٢س – ص – ٣ = صفر

الحل :

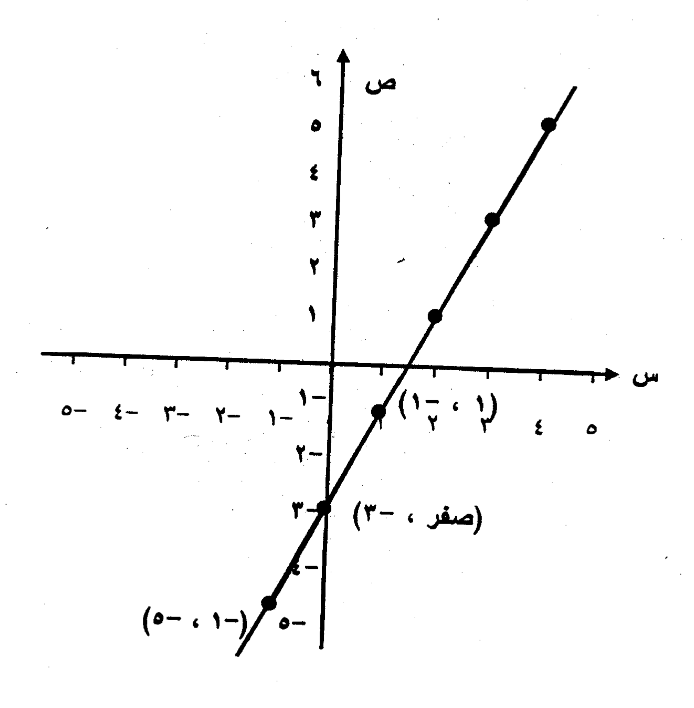
لتمثيل هذه المعادلة بيانياً يمكننا إعادة كتابتها كما يلى:

ص = ٢س – ٣

وعلى ذلك يمكننا إفتراض عدة قيم للمتغير المستقل س ثم نحصل على قيم المتغير التابع ص ، ويمكن توضيح ذلك بالجدول التالي:

س	-٢	-١	صفر	١	٢	٣
ص	-٧	-٥	-٣	-١	١	٣

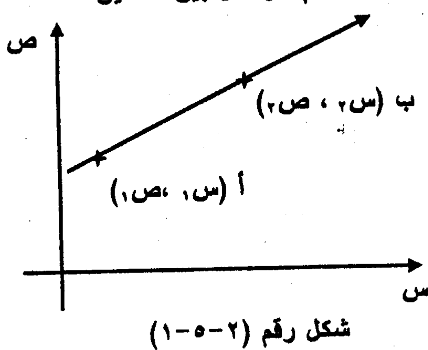
وعلى هذا الأساس وبتمثيل هذه النقاط في الرسم البياني نحصل على الخط المستقيم المطلوب تمثيله بيانياً كما هو مُوضح في الشكل (٢-٤-١) التالي:



شكل (٢-٤-١)

(٢-٥) إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطتين واقعتين على الخط المستقيم :

كثيراً ما نجد أنه من المناسب إيجاد معادلة الخط المستقيم الواصل بين نقطتين معلومتين واقعتين على ذلك الخط ، والشكل (٢-٥-١) يوضح الخط المستقيم الواصل بين نقطتين :



شكل رقم (٢-٥-١)

وبفرض أن النقطتين أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢). تقعان على هذا الخط المستقيم ، فإنه يمكن إيجاد معادلة ذلك الخط كما يلي:

$$\frac{ص - ص_1}{ص_2 - ص_1} = \frac{س - س_1}{س_2 - س_1}$$

أو أن :

$$ص - ص_1 = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} (س - س_1)$$

حيث :

$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ ، تمثل ميل الخط المستقيم .

مثال (٤)

أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٢،٢)، (٤،٨)

الحــل :

يمكن تحديد النقطتين السابقتين كما يلى:

$(س_١ ، ص_١) = (٢ ، ٢)$

$(س_٢ ، ص_٢) = (٤ ، ٨)$

$\because ص - ص_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} (س - س_١)$

$\therefore ص - ٢ = \frac{٨ - ٢}{٤ - ٢} (س - ٢)$

$\therefore ص - ٢ = \frac{٦}{٢} (س - ٢)$

$\therefore ص - ٢ = ٣ (س - ٢)$

$\therefore ص - ٢ = ٣ س - ٦$

$\therefore$ معادلة الخط المستقيم المطلوبة هي :

$ص = - ٤ + ٣ س$

مثال (٥)

إذا كانــت العلاقة بين كمية الإنتاج (س) وتكلفة الإنتاج (ص) بأحد المصانع علاقة خطية بحيث أنه عند إنتاج ٢٠ وحدة تكون التكلفة الكلية ٤٠٠ جنــيه ، وعند إنتاج ١٠٠ وحدة تكون التكلفة الكلية ١٦٠٠ جنيه ، المطلوب إيجــاد معادلة الخط المستقيم التي تصف العلاقة بين كمية الإنتاج (س) وتكلفة الإنتاج (ص) ، ثم أوجد تلفة إنتاج ٢٠٠ وحدة ؟

الحـــل :

إيجاد معادلة الخط المستقيم بين كمية الإنتاج وتكلفة الإنتاج :

يمكن تحديد النقطتين الممثلتين للعلاقة بين المتغيرين (س،ص) كما يلي:

$(س_١ ، ص_١) = (٢٠ ، ٤٠٠)$

$(س_٢ ، ص_٢) = (١٠٠ ، ١٦٠٠)$

$$\because ص - ص_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} (س - س_١)$$

$$\therefore ص - ٤٠٠ = \frac{١٦٠٠ - ٤٠٠}{١٠٠ - ٢٠} (س - ٢٠)$$

$$\therefore ص - ٤٠٠ = \frac{١٢٠٠}{٨٠} (س - ٢٠)$$

$$\therefore ص - ٤٠٠ = ١٥ (س - ٢٠)$$

$$\therefore ص - ٤٠٠ = ١٥ س - ٣٠٠$$

∴ معادلة الخط المستقيم المطلوبة هي :

$$ص = ١٠٠ + ١٥ س$$

تحديد التكاليف عند إنتاج ٢٠٠ وحدة :

عند إنتاج ٢٠٠ وحدة ، تكون التكاليف الكلية هي :

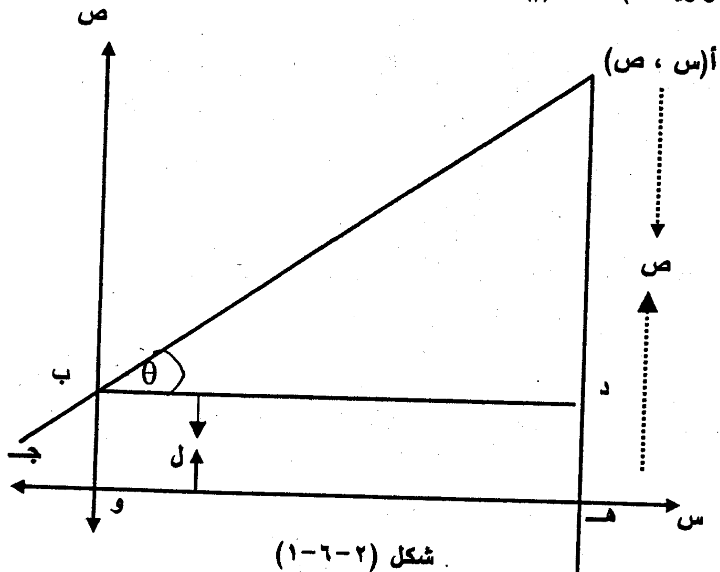
$$ص = ١٠٠ + (١٥ \times ٢٠٠)$$

$$= ١٠٠ + ٣٠٠٠$$

$$= ٣١٠٠ \text{ جنيه .}$$

(٢-٦) إيجاد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله ونقطة واحدة واقعة عليه :

إذا فرض وأنه كان لدينا خط مستقيم مثل الخط أ جـ فى الشكل (٢-٦-١) كذلك نفترض ان هذا الخط المستقيم يكون زاوية قدرها "θ" مع الإتجاه الموجب لمحور السينات وس (أى أن ميل هذا المستقيم هو ظل الزاوية θ) يعادل (م).



شكل (٢-٦-١)

فإذا كانت "أ" أية نقطة على هذا المستقيم وأن قيمتها غير محددة ولتكن (س ، ص) فمن الرسم يتضح أن قيمة "س" يجب أن تساوى المسافة وهـ ، وأن قيمة "ص" يجب أن تساوى المسافة أهـ

وعلى ذلك يمكن تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله ونقطة واحدة واقعة عليه كما يلي :

حيث انه بمعلومية النقطتين أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) وهما تقعان على هذا الخط المستقيم ، فقد وجدنا أن معادلة ذلك الخط المستقيم هي :

$$ص - ص_1 = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} (س - س_1)$$

وحيث أن :

$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

وعلى ذلك يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم والذى له ميل يعادل "م" ويمر بالنقطة (س$_1$ ، ص$_1$) كما يلي :

$$ص - ص_1 = م (س - س_1)$$

وتُستخدم هذه العلاقة الأخيرة في تقدير معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل ونقطة واحدة تقع على ذلك الخط .

مثال (٦)

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٥ ، -٣) إذا كان ميله يساوى (-٢).

الحل :

$\because$ ص - ص$_1$ = م (س - س$_1$)

حيث : م = -٢ ، ص$_1$ = -٣ ، س$_1$ = ٥

$\therefore$ ص - (-٣) = (-٢) (س - ٥)

$\therefore$ ص + ٣ = -٢ س + ١٠

$\therefore$ ص = -٢ س + ٧

مثال (٧)

إذا كانت العلاقة بين الطلب (ص) والسعر (س) علاقة خطية بحيث أنه عند الطلب ٢٠٠ وحدة يكون السعر ١٠ جنيه ، وكان معدل التغير في الكمية المطلوبة (الميل) = ٤ ، المطلوب إيجاد معادلة الخط المستقيم التي تصف العلاقة بين سعر السلعة والكمية المطلوبة منها ؟٠

الحل :

حيث أن المعلوم هنا الميل ونقطة ، تكون المعادلة في الصورة :

ص – ص١ = م (س – س١)

حيث :

الميل = م = –٤ (وذلك لأن العلاقة بين الطلب والسعر علاقة عكسية)

النقطة هي : (س١ ، ص١) = (١٠ ، ٢٠٠)

∴ ص – (٢٠٠) = (–٤) (س – ١٠)

∴ ص – ٢٠٠ = –٤ س + ٤٠

∴ معادلة الخط المستقيم التي تصف العلاقة بين الطلب والسعر هي :

ص = –٤ س + ٢٤٠

مثال (٨)

في مصنع الإسراء للحاسبات الألكترونية تتحدد العلاقة بين الأرباح الإجمالية (ص) وحجم مبيعات الحاسبات الألكترونية (س) وفقاً لدالة من الدرجة الأولى (ص = أ + ب س) وقد قام مدير المبيعات بدراسة الربحية والخسارة وكانت نتيجة هذه الدراسة كما يلي :

- تخسر الشركة ما يوازي قيمة المرتبات الثابتة المدفوعة للعاملين بإدارة المبيعات وقيمتها (٥٠٠٠ جنيه)في حالة عدم بيع أي جهاز٠
- تبلغ الأرباح الإجمالية (٣٠٠٠٠٠ جنيه) في حالة بيع (١٠٠٠ جهاز)

والمطلوب :

١. تقدير الأرباح الإجمالية الناتجة عن بيع ٣٠٠٠ جهاز ؟.

٢. تحديد متوسط ربح الجهاز الواحد في الحالة السابقة ؟.

الحـــل :

∵ ص = أ + ب س

وبالنظر إلى بيانات هذا المثال نجد أن (ص) تمثل الأرباح الإجمالية ، ومن ثم فإن قيمة المرتبات الثابتة التي يتحملها المصنع (٥٠٠٠ ج) يجب يجب أن تُدرج في المعادلة بإشارة سالبة لأنها تمثل خسارة ، وهي تمثل قيمة الثابت (أ) لأنها تمثل قيمة المتغير التابع (ص) عند (س) تساوي صفر ، وعلى ذلك فإن :

∴ أ = - ٥٠٠٠

∴ ص = - ٥٠٠٠ + ب س

∵ ص = ٣٠٠٠٠٠ عندما س = ١٠٠٠ جهاز

∴ ٣٠٠٠٠٠ = - ٥٠٠٠ + ب (١٠٠٠)

∴ ٣٠٥٠٠٠ = ١٠٠٠ ب

∴ ب = $\frac{٣٠٥٠٠٠}{١٠٠٠}$ = ٣٠٥ جنيه .

وهـــذا الرقم يمثل ثمن بيع الجهاز الواحد ، وبالتالي تكون معادلة الخط المستقيم هي : ص = -٥٠٠٠ + ٣٠٥ س

ومن هنا :

(١) الأرباح الإجمالية الناتجة عن بيع ٣٠٠٠ جهاز =

ص = - ٥٠٠٠ + (٣٠٥ × ٣٠٠٠) = ٩١٠٠٠٠ جنيه

(٢) متوسط ربح الجهاز الواحد = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٩١٠٠٠٠}{٣٠٠٠}$ = ٣٠٣ جنيه تقريباً .

ملاحظات هامة :

قد يكون الخط المستقيم موازياً للمحور السيني ، وفي هذه الحالة يكون ميل الخط المستقيم هو :

م = صفر

قد يكون الخط المستقيم موازياً للمحور الصادي (أي عمودي على المحور السيني) ، وفي هذه الحالة يكون ميل الخط المستقيم هو :

م = ∞

مثال (٩)

صف الخط الواصل بين النقطتين (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٢) ؟.

الحـــل :

ميل الخط الواصل بين النقطتين (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٢) =

$$م = \frac{٢ - ٢}{٥ - ٣} = \frac{صفر}{٢} = صفر$$

وهذا يعني أن الخط الذى يصل بين النقطتين (٣ ، ٢) ، (٥ ، ٢) هو خط موازى لمحور السينات .

مثال (١٠)

صف الخط الواصل بين النقطتين (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٩).

الحـــل :

$$م = \frac{٩ - ٥}{٢ - ٢} = \frac{٤}{صفر} = كمية\ غير\ معرفة$$

وبالـــتالى فإن الخط الواصل بين النقطتين (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٩) هـــو خط عمودى على المحور السينى أو مواز للمحور الصادى وبصفة عامة تكون معادلة هذا الخط هى: س = أ ، أي س = ٢

(٢-٧) تقدير معادلة الخط المستقيم بطريقة المربعات الصغرى :

لقد سبق أن ذكرنا أن معادلة الخط المستقيم تأخذ الصورة التالية:

ص = أ + ب س

والمقصود بتقدير المعادلة: ص = أ + ب س هو الحصول على تقدير لقيمتي (أ ، ب) بإستخدام الطريقة المناسبة حتى يمكننا إستخدام المعادلة المقدرة سواء فى تقدير قيم المتغير التابع أو التنبؤ بها فى المستقبل ، وإستخدامها فى التطبيقات العملية المختلفة.

وتتعدد طرق تقدير المعادلة الخطية ، نذكر منها فقط طريقة المربعات الصغرى *Ordinary Least Squares* أو كما يسميها البعض طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) ، ونتناول فى الجزء التالى بشكل من الإيجاز كيفية تقدير معادلة الخط المستقيم بإستخدام طريقة المربعات الصغرى .

وتقوم فلسفة طريقة المربعات الصغرى على محاولة الحصول على تقدير لقيمتى (أ ، ب) اللاتى تجعلان مجموع مربعات الفروق بين القيم الحقيقية للمتغير التابع والقيم التقديرية له أقل ما يمكن ، وقد أمكن تحقيق ذلك من خلال إيجاد قيمتى (أ̂ ، ب̂) وذلك بحل المعادلتين التاليتين :

$مجـ_{ص} = ن\ أ + ب\ مجـ_{س}$

$مجـ_{س ص} = أ\ مجـ_{س} + ب\ مجـ_{س^٢}$

وبحل هاتين المعادلتين أمكن تقدير ثابتيْ المعادلة كما يلي :

$$\hat{ب} = \frac{مجـ س ص - \frac{(مجـ س)(مجـ ص)}{ن}}{مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}}$$

$$\hat{أ} = \frac{مجـ ص}{ن} - \hat{ب} \frac{مجـ س}{ن}$$

حيث :

$\hat{أ}$: تقدير القيمة الحقيقية للثابت (أ).

$\hat{ب}$: تقدير القيمة الحقيقية للثابت (ب).

ن : عدد أزواج قيم المتغيرين (س ، ص).

والمثال التالى يوضح كيفية إستخدام هذه الطريقة:

مثال (١١)

أوجد معادلة الخط المستقيم بإستخدام طريقة المربعات الصغرى بفرض أن بيانات المتغيرين المستقل (س) والتابع (ص) على النحو التالي :

س	٢	٤	٦	٨	١٠
ص	٥	٧	١١	١٢	١٥

الحــل :

يمكن إستخدام مجموعتي البيانات السابقة للحصول على قيمتي (أ ، ب) بإستخدام طريقة المربعات الصغرى ، حيث:

$$ب = \frac{مجـ س ص - \frac{(مجـ س)(مجـ ص)}{ن}}{مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}}$$

$$أ = \frac{مجـ ص}{ن} - ب \frac{مجـ س}{ن}$$

ويتطلب ذلك حساب كل من المجاميع :

$مجـ_{س}$ ، $مجـ_{ص}$ ، $مجـ_{س ص}$ ، $مجـ_{س^{٢}}$ ، وذلـك مـن خلال تكوين الجدول التالى:

س	ص	س ص	$س^{٢}$
٢	٥	١٠	٤
٤	٧	٢٨	١٦
٦	١١	٦٦	٣٦
٨	١٢	٩٦	٦٤
١٠	١٥	١٥٠	١٠٠
٣٠	٥٠	٣٥٠	٢٢٠

ويتضح من الجدول السابق أن:

$مجـ_{س} = ٣٠$ ، $مجـ_{ص} = ٥٠$ ، $مجـ_{س ص} = ٣٥٠$

$مجـ_{س^{٢}} = ٢٢٠$ ، ن = ٥

وبالتعويض بهذه المجاميع السابقة نحصل على:

$$\hat{ب} = \frac{٣٥٠ - \frac{٣٠ \times ٥٠}{٥}}{٢٢٠ - \frac{(٣٠)^٢}{٥}} = \frac{٣٥٠ - ٣٠٠}{٢٢٠ - ١٨٠}$$

$$= \frac{٥٠}{٤٠} = \boxed{١,٢٥}$$

، $$\hat{أ} = \frac{٥٠}{٥} - \left(\frac{٣٠}{٥} \times ١,٢٥\right) = ١٠ - (١,٢٥ \times ٦) = \boxed{٢,٥}$$

لاحظ أن : ن = ٥ (عدد أزواج قيم س ، ص)

وعلى ذلك فإن معادلة الخط المستقيم المقدرة هي :

$$\boxed{\hat{ص} = ٢,٥ + ١,٢٥ \text{ س}}$$

حيث تشير ($\hat{ص}$) إلى قيم (ص) التقديرية وليست الحقيقية ، ومن ذلك نجد أن القيمة التقديرية لقيمة (ص) ، عندما تساوى قيمة (س) صفراً، هى (٢,٥) وأن إشارة معامل (س) إشارة موجبة مما يشير إلى أن العلاقة بين المتغيرين (س ، ص) علاقة طردية

وبالتالى فإن القيمة الموجبة لمعامل (س) ، وهى (١,٢٥) تمثل مقدار الزيادة المتوقعة فى قيمة المتغير (ص) عندما تزيد قيمة المتغير (س) بمقدار واحد صحيح ، أو هى مقدار النقص المتوقع فى قيمة المتغير (ص) عندما تنقص قيمة المتغير (س) بمقدار واحد صحيح.

(٢-٨) القيم التقديرية والخطأ المعيارى للتقدير:

يقصد بالقيم التقديرية هنا القيم التقديرية للمتغير التابع (صَ) الـتى نحصل عليها بإستخدام المعادلة المقدرة (صَ = أَ + بَ س) إذا مـا عوضنا فى هذه المعادلة بالقيم الحقيقية للمتغير المستقل (س) فى أى فترة زمنية سابقة (وليست مستقبلية)، وبالطبع ستختلف قيم (ص) الحقيقية عن القيم التقديرية لها (صَ)، وتكون هناك فروق موجبة أو سالبة بين القيم الحقيقية والقيم التقديرية، وهذا أمر بديهى، وتسمى هـذه الفـروق بأخطاء التقدير (أو البواقى)، وترجع هذه الأخطاء إلى العديد من الأسباب لا مجال هنا لذكرها.

مثال (١٢)

وضـح كيفـية الحصول على القيم التقديرية وأخطاء التقدير بالتطبيق على بيانات المثال السابق ؟.

الحـل :

يبين الجدول التالى كيفية الحصول على كل من القيم التقديرية وأخطاء التقدير:

س	ص	القيم التقديرية صَ= ٢,٥ + ١,٢٥ س	أخطاء التقدير خ = ص - صَ
٢	٥	صَ١ = ٢,٥ + ١,٢٥ (٢) = ٥	صفر
٤	٧	صَ٢ = ٢,٥ + ١,٢٥ (٤) = ٧,٥	- ٠,٥
٦	١١	صَ٣ = ٢,٥ + ١,٢٥ (٦) = ١٠	١
٨	١٢	صَ٤ = ٢,٥ + ١,٢٥ (٨) = ١٢,٥	- ٠,٥
١٠	١٥	صَ٥ = ٢,٥ + ١,٢٥ (١٠) = ١٥	صفر

وتســتخدم أخطاء التقدير التى حصلنا عليها من الجدول السابق فى حساب الخطأ المعيارى للتقدير بإستخدام المعادلة التالية:

$$\text{الخطأ المعيارى للتقدير} = \sqrt{\frac{\text{مجموع مربعات أخطاء التقدير}}{ن - ٢}}$$

$$= \sqrt{\frac{مجـ(ص - \hat{ص})^{٢}}{ن - ٢}}$$

ولحساب الخطأ المعيارى للتقدير يتطلب الأمر تكوين الجدول التالى:

أخطاء التقدير خ = ص - ص̂	مربعات أخطاء التقدير $(خ^{٢})$
صفر	صفر
- ٠,٥	٠,٢٥
١	١
- ٠,٥	٠,٢٥
صفر	صفر
المجموع	١,٥

أى أن : $مجـ(ص - \hat{ص})^{٢} = ١,٥$

وعلى ذلك فإن:

$$\text{الخطأ المعيارى للتقدير} = \sqrt{\frac{١,٥}{٥ - ٢}}$$

$$= \sqrt{٠,٥} = ٠,٧١ \text{ تقريباً}$$

ملاحظات هامة:

(١)تشـــير (صَ) إلـــى قيم (ص) التقديرية وليست الحقيقية ، ومن ذلـــك نجـــد أن القـــيمة التقديرية لقيمة (ص) ، عندما تساوى قيمة (س) صفراً، هى (قيمة الثابت أ) .

(٢)تدل إشارة معامل (س) [بَ] إلى نوعية العلاقة بين المتغيرين (س ، ص) ، فـــإذا كانـــت إشارة موجبة فهذا يشير إلى أن العلاقة بين المتغيرين (س ، ص) علاقة طردية والعكس بالعكس .

(٣)تمـــثل قيمة معامل (س) [بَ] مقدار الزيادة المتوقعة فى قيمة المتغير (ص) عندما تزيد قيمة المتغير (س) بمقدار واحد صحيح ، أو هـــى مقدار النقص المتوقع فى قيمة المتغير (ص) عندما تنقص قيمة المتغير (س) بمقدار واحد صحيح.

(٤)تُعتـــبر ضـــآلة الفروق (السالبة والموجبة) بين القيم الحقيقية والقـــيم الـــتقديرية إشـــارة إلى إنخفاض أخطاء التقدير ، ومن ثم إنخفـــاض الخطأ المعيارى للتقدير ، وهذا يعنى دقة تمثيل المعادلة الخطـــية للعلاقة بين المتغيرين (س ، ص) بالإضافة إلى قوة تأثير المتغير المستقل (س) على المتغير التابع (ص).

(٥)يمكـــن إســـتخدام معادلة الخط المستقيم فى التنبؤ بقيم المتغير الـــتابع فـــى أى فـــترة زمنـــية مستقبلية عن طريق التعويض بقيم المتغـــير المســـتقل (فى هذه الفترة الزمنية المستقبلة) فى المعادلة الخطـــية المقـــدرة الـــتى تـــربط بين المتغيرين (التابع والمستقل) فنحصل على القيمة (أو القيم) المتنبأ بها للمتغير التابع أو الظاهرة محل التنبؤ.

تطبيقات تجارية متنوعة على معادلة الخط المستقيم:

يوجد العديد من التطبيقات التجارية والإقتصادية لمعادلة الخط المستقيم والتي نسوق منها التطبيقات العملية التالية :

التطبيق الأول :

بفرض أن قيم المتغيرين المستقل (س) والتابع (ص) كما يلي:

س	١	٢	٤	٥	٣	٦	٨
ص	٣	٥	٨	١٠	٧	١٢	١٥

المطلـوب تقديـر معادلـة الخـط المسـتقيم بإستخدام طريقة المربعات الصغرى ؟٠

الحـل :

يمكن إستخدام مجموعتي البيانات السابقة للحصول على قيمتي (أ̂ ، ب̂) بإستخدام طريقة المربعات الصغرى ، حيث:

$$\hat{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ س ص} - \frac{(\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\text{ن}}}{\text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}}$$

$$\hat{\text{أ}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} - \hat{\text{ب}}\,\frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

ويتطلب ذلك حساب كل من المجاميع : $\text{مجـ}_{\text{س}}$ ، $\text{مجـ}_{\text{ص}}$ ، $\text{مجـ}_{\text{س ص}}$ ، $\text{مجـ}_{\text{س}^{2}}$ ، وذلك من خلال تكوين الجدول التالي:

س	ص	س ص	$س^{٢}$
١	٣	٣	١
٢	٥	١٠	٤
٤	٨	٣٢	١٦
٥	١٠	٥٠	٢٥
٣	٧	٢١	٩
٦	١٢	٧٢	٣٦
٨	١٥	١٢٠	٦٤
٢٩	٦٠	٣٠٨	١٥٥

ويتضح من الجدول السابق أن:

$مجـ_{س} = ٢٩$ ، $مجـ_{ص} = ٦٠$ ، $مجـ_{س ص} = ٣٠٨$ ،

$مجـ_{س^{٢}} = ١٥٥$ ، $ن = ٧$

وبالتعويض بهذه المجاميع السابقة نحصل على:

$$ب = \frac{٣٠٨ - \frac{٢٩ \times ٦٠}{٧}}{١٥٥ - \frac{(٢٩)^{٢}}{٧}} = \frac{٣٠٨ - ٢٤٨,٥٧}{١٥٥ - ١٢٠,١٤}$$

$$= \frac{٥٩,٤٣}{٣٤,٨٦} = \boxed{١,٧}$$

$$، \quad أ = \frac{٦٠}{٧} - \left(\frac{٢٩}{٧} \times ١,٧\right) = ٨,٥٧ - (٤,١٤ \times ١,٧) = \boxed{١,٥٣}$$

وعلى ذلك فإن معادلة الخط المستقيم المقدرة هي :

$$\hat{ص} = ١,٥٣ + ١,٧ \, س$$

التطبيق الثاني :

بفــرض أن الدالــة التالــية تمثل العلاقة بين حجم الطلب على سلعة ما (ط) وسعر بيع الوحدة من تلك السلعة (س) :

ط̂ = ١٠٠٠ − ٥ س

فالمطلوب:

(١) إشــرح مدلــول هــذه الدالــة موضحاً ما تشير إليه من طبيعة العلاقة بين حجم الطلب (ط) وسعر بيع الوحدة (س).

(٢) إذا كان المستهدف هو زيادة حجم المبيعات من السلعة إلى ٥٠٠ وحــدة ، فما هو سعر البيع الذى نتوقع أن يحقق لنا هذا المستوى من المبيعات ؟

(٣) إذا كــان مــن المتوقع حدوث زيادة فى سعر بيع السلعة قدرها ٢٥ جنــيه ؛ فكيف سيكون تأثير ذلك على الكمية المطلوبة من هذه السلعة ؟

الحــل :

(١) *طبيعة العلاقة بين المتغيرين:*

تعكس المعادلة ط̂ = ١٠٠٠ − ٥ س ما يلي :

خطــية العلاقــة بيــن المتغيرين (س ، ط) ، حيث تتوقف قيمة المتغير التابع (ط) على القيمة التى يأخذها المتغير المستقل (س).

أن قــيمة الثابت (أ̂) تساوى (١٠٠٠)، ويعنى ذلك أن القيمة التقديرية للمتغــير الــتابع (ط̂) تســاوى (١٠٠٠) عــندما تساوى قيمة المتغير المستقل (س) صفراً

أن معامل المتغير المستقل (س) يأخذ إشارة سالبة ويساوى (-٥) مما يشـير إلى أن العلاقة بين المتغيرين (س ، ط) علاقة عكسية ، فبزيادة المتغـير (س) بمقـدار واحد صحيح تنقص القيمة التقديرية للمتغير (ط) بمقـدار (٥) ، وتـزداد هذه القيمة التقديرية بمقدار (٥) إذا نقصت قيمة المتغير (س) بمقدار واحد صحيح.

(٢) لإيجـاد سـعر البـيع الـذي يحقق حجم المبيعات المطلوب (٥٠٠ وحـدة) يتم التعويض عن المتغير طَ في المعادلة بالمستوى المطلوب تحقيقه ، وعلى ذلك يكون :

∵ طَ = ١٠٠٠ - ٥ س

∴ ٥٠٠ = ١٠٠٠ - ٥ س

∴ ٥٠٠ - ١٠٠٠ = - ٥ س

∴ ٥ س = ٥٠٠

∴ س = $\frac{٥٠٠}{٥}$ = ١٠٠ وحدة نقد ،

(٣) يمكـن معـرفة تأثـير التغـير في المتغير المستقل (س) بالمعادلة الخطـية فـي المتغـير التابع من خلال الجزء [بَ × Δس] ، حيث Δس يمثل حجم التغير في المتغير المستقل ، وعلى ذلك يكون :

بَ = - ٥ ، Δس = ٢٥

∴ مقدار التغير في طَ = - ٥ × ٢٥ = - ١٢٥ وحدة إنتاج

<u>وهذا يعني أن</u> :

حدوث زيادة قدرها ٢٥ جنيه في سعر بيع الوحدة (س) سيؤدي إلى إنخفاض حجم الطلب على تلك السلعة بمقدار ١٢٥ وحدة ، وذلـك لأن حـدوث زيـادة قدرهـا جنيه واحد في السعر (س) سيؤدي إلى إنخفاض حجم الطلب بمقدار وحدة واحدة .

التطبيق الثالث :

بفرض أن العلاقة المقدرة بين المتغيرين (س ، ص) هى:

صَ = ١٠٠ - ٢ س

فالمطلوب:

(١) تفسير ما تعكسه المعادلة السابقة من طبيعة العلاقة بين المتغيرين (س ، ص).

(٢)التنبؤ بقيم المتغير (ص) فى السنوات ٩٤ ، ٩٥ ، ١٩٩٦ إذا علمت أن القيم المتوقعة للمتغير (س) فى هذه السنوات الثلاث هى : ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ على الترتيب.

الحل :

(١) طبيعة العلاقة بين المتغيرين:

تعكس المعادلة صَ = ١٠٠ - ٢ س خطية العلاقة بين المتغيرين (س ، ص) ، حيث تتوقف قيمة المتغير التابع (ص) على القيمة التى يأخذها المتغير المستقل (س).

فنجد أن قيمة الثابت (أ) تساوى (١٠٠)، ويعنى ذلك أن القيمة التقديرية للمتغير التابع (صَ) تساوى (١٠٠) عندما تساوى قيمة المتغير المستقل (س) صفراً.. كما نلاحظ أن معامل (س) يأخذ إشارة سالبة ويساوى (-٢) مما يشير إلى أن العلاقة بين المتغيرين (س ، ص) علاقة عكسية ، فبزيادة المتغير (س) بمقدار واحد صحيح تنقص القيمة التقديرية للمتغير (ص) بمقدار (٢) ، وتزداد هذه القيمة التقديرية بمقدار (٢) إذا نقصت قيمة المتغير (س) بمقدار واحد صحيح.

(٢) التنبؤ:

يمكننا التنبؤ بقيم المتغير التابع (ص) فى السنوات المحددة بالتعويض بالقيم المتوقعة للمتغير المستقل (س) فى المعادلة المقدرة:

ص̂ = ١٠٠ – ٢ س

وذلك كما يلى:

– سنة ١٩٩٤:

س = ١٠ ، ومن ثَم:

ص̂ ١٩٩٤ = ١٠٠ – ٢ × ١٠ = ٨٠

– سنة ١٩٩٥:

س = ٢٠ ، ومن ثَم:

ص̂ ١٩٩٥ = ١٠٠ – ٢ × ٢٠ = ٦٠

– سنة ١٩٩٦:

س = ٣٠ ، ومن ثَم:

ص̂ ١٩٩٦ = ١٠٠ – ٢ × ٣٠ = ٤٠

ويمكن تلخيص هذه النتائج بالجدول التالى:

السنة	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦
س	١٠	٢٠	٣٠
ص̂	٨٠	٦٠	٤٠

ويتضح للقارئ مما سبق إنخفاض قيمة (ص̂) بإرتفاع قيمة (س) ، مما يبرز عكسية العلاقة بين المتغيرين (س ، ص).

التطبيق الرابع :

البيانات التالية تمثل الكمية المباعة (ص) من أحد المنتجات ، وسعر البيع (س) ، وذلك عن الفترة الزمنية (١٩٩٥-٢٠٠٠م) ، حيث :

ص = أ + ب س

السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
سعر البيع (س)	٣	٢	١	٤	٦	١٠
الكمية المباعة (ص)	١٠	١٥	٢٠	١٠	٨	٤

المطلوب :

١. تقدير معادلة الخط المستقيم التي تصف العلاقة بين الكمية المباعة (ص) وسعر البيع (س) ، بطريقة المربعات الصغرى ؟

٢. التنبؤ بالكميات المباعة (ص) فى السنوات ٢٠٠١ ، ٢٠٠٢ ، ٢٠٠٣ إذا علمت أن القيم المتوقعة للمتغير (س) فى هذه السنوات الثلاث هى ٩ ، ٨ ، ٧ على الترتيب.

الحل :

(١) تقدير معادلة الخط المستقيم :

تكون معادلة الخط المستقيم في الصورة :

$$\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}س$$

ويمكن الحصول على قيمتي ($\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$) بإستخدام طريقة المربعات الصغرى ، حيث :

$$\hat{ب} = \frac{مجـ س ص - \frac{(مجـ س)(مجـ ص)}{ن}}{مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}} \quad ، \quad \hat{أ} = \frac{مجـ ص}{ن} - \hat{ب}\frac{مجـ س}{ن}$$

ويمكن حساب كل من المجاميع : $مجـ_{س}$ ، $مجـ_{ص}$ ، $مجـ_{س ص}$ ، $مجـ_{س^٢}$ ، من خلال تكوين الجدول التالى:

س	ص	س ص	$س^٢$
٣	١٠	٣٠	٩
٢	١٥	٣٠	٤
١	٢٠	٢٠	١
٤	١٠	٤٠	١٦
٦	٨	٤٨	٣٦
١٠	٤	٤٠	١٠٠
٢٦	٦٧	٢٠٨	١٦٦

ويتضح من الجدول السابق أن :

$مجـ_{س} = ٢٦$ ، $مجـ_{ص} = ٦٧$ $مجـ_{س ص} = ٢٠٨$ ،

$مجـ_{س^٢} = ١٦٦$ ، ن = ٦

وبالتعويض بهذه المجاميع السابقة نجد أن :

$$ب = \frac{٢٠٨ - \frac{٢٦ \times ٦٦}{٦}}{١٦٦ - \frac{(٢٦)^٢}{٦}} = \frac{٢٠٨ - ٢٩٠}{١٦٦ - ١١٣}$$

$$= \frac{-٨٢}{٥٣} = \boxed{-١,٥}$$

، $$أ = \frac{٦٧}{٦} - \left(-١,٥ \times \frac{٢٦}{٦}\right) = \boxed{١٧}$$

وعلى ذلك فإن معادلة الخط المستقيم المقدرة هي :

$$\hat{ص} = ١٧ - ١,٥ \, س$$

(٢) التنبؤ بالكميات المباعة (ص) :

يمكننا التنبؤ بقيم المتغير التابع (ص) فى السنوات المحددة بالتعويض بالقيم المتوقعة للمتغير المستقل (س) فى المعادلة المقدرة:

صَ = ١٧ – ١,٥ س

وذلك كما يلى:

- سنة ٢٠٠١م :

س = ٩

∴ صَ ٢٠٠١ = ١٧ – (١,٥ × ٩) = ١٧ – ١٣,٥ = ٣,٥

- سنة ٢٠٠٢م :

س = ٨

∴ صَ ٢٠٠٢ = ١٧ – (١,٥ × ٨) = ١٧ – ١٢ = ٥

- سنة ٢٠٠٣م :

س = ٧

∴ صَ ٢٠٠١ = ١٧ – (١,٥ × ٧) = ١٧ – ١٠,٥ = ٦,٥

ويمكن تلخيص نتائج التنبؤ بالجدول التالى:

السنة	٢٠٠١	٢٠٠٢	٢٠٠٣
س	٩	٨	٧
صَ	٣,٥	٥	٦,٥

ويتضح من نتائج التنبؤ أنه كلما قل سعر البيع (س) كلما زادت الكمية المباعة المقدرة (صَ) ، مما يبرز عكسية العلاقة بين المتغيرين (س ، ص).

التطبيق الخامس :

البيانات التالية تمثل الأرباح الإجمالية (بالألف جنيه) (ص) لمبيعات أحد المنتجات ، والكمية المباعة (بآلاف الوحدات) (س) ، وذلك عن الفترة الزمنية (١٩٩٤-٢٠٠٠م) ، حيث :

السنة	١٩٩٥	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
الكمية (س)	٣	٦	٥	٤	٥	٢	١٠
الأرباح(ص)	٣	٤	٢	٦	٥	١	٧

المطلوب :

١. **تقدير معادلة الخط المستقيم التي تصف العلاقة بين الكمية المباعة (س) والأرباح (ص) ، بطريقة المربعات الصغرى ؟**

٢. **تفسير المعادلة المقدرة ؟.**

٣. **حساب الخطأ المعياري للتقدير ؟.**

٤. **التنبؤ بالأرباح الإجمالية (ص) فى السنوات ٢٠٠١ ، ٢٠٠٢ ، ٢٠٠٣ إذا علمت أن القيم المتوقعة للمتغير (س) فى هذه السنوات الثلاث هى ٩ ، ٧ ، ٥ على الترتيب.**

الحل :

(١) تقدير معادلة الخط المستقيم :

تكون معادلة الخط المستقيم في الصورة :

صَ = أ + بَس

ويمكن الحصول على قيمتي (أ ، بْ) بإستخدام طريقة المربعات الصغرى ، حيث :

$$بْ = \frac{مجـ س ص - \frac{(مجـ س)(مجـ ص)}{ن}}{مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}} \quad ، \quad أ = \frac{مجـ ص}{ن} - بْ \frac{مجـ س}{ن}$$

ويمكن حساب كل من المجاميع : مجـ$_{س}$ ، مجـ$_{ص}$ ، مجـ$_{س ص}$ ، مجـ$_{س^{٢}}$ ، من خلال تكوين الجدول التالي:

س	ص	س ص	س^{٢}
٣	٣	٩	٩
٦	٤	٢٤	٣٦
٥	٢	١٠	٢٥
٤	٦	٢٤	١٦
٥	٥	٢٥	٢٥
٢	١	٢	٤
١٠	٧	٧٠	١٠٠
٣٥	٢٨	١٦٤	٢١٥

∴ مجـ$_{س}$ = ٣٥ ، مجـ$_{ص}$ = ٢٨ مجـ$_{س ص}$ = ١٦٤ مجـ$_{س^{٢}}$ = ٢١٥ ،

وبالتعويض بهذه المجاميع السابقة نجد أن :

$$بْ = \frac{١٦٤ - \frac{٣٥ \times ٢٨}{٧}}{٢١٥ - \frac{(٣٥)^{٢}}{٧}} = \frac{١٦٤ - ١٤٠}{٢١٥ - ١٧٥} = \frac{٢٤}{٤٠} = \boxed{٠,٦}$$

$$، \quad أ = \frac{٢٨}{٧} - \left(\frac{٣٥}{٧} \times ٠,٦\right) = ٤ - (٠,٦ \times ٥) = \boxed{١}$$

وعلى ذلك فإن معادلة الخط المستقيم المقدرة هي :

$$صْ = ١ + ٠,٦ \text{ س}$$

(٢) تفسير المعادلة :

تعكس المعادلة ص̂ = ١ + ٠,٦ س ما يلي :

- أن قيمة الثابت (أ̂) تساوى (١)، ويعنى ذلك أن القيمة التقديرية للمتغير التابع (ص̂) تساوى (١) عند (س) = صفراً.
- أن معامل (س) يأخذ إشارة موجبة ويساوى (+٠,٦) مما يشير إلى أن العلاقة بين المتغيرين (س ، ص) علاقة طردية .
- أن قيمة الثابت (ب̂) تساوى (+٠,٦)، يعنى أنه بزيادة المتغير (س) بمقدار واحد تزيد القيمة التقديرية للمتغير (ص) بمقدار (٠,٦)

(٣) حساب الخطأ المعياري للتقدير :

نكون الجدول التالى لحساب الخطأ المعيارى للتقدير:

س	ص	القيم التقديرية ص̂ = ١ + ٠,٦ س	أخطاء التقدير خ = ص - ص̂	مربعات أخطاء التقدير = خ٢
٣	٣	ص̂١ = ١ + ٠,٦ (٣) = ٢,٨	٠,٢	٠,٠٤
٦	٤	ص̂٢ = ١ + ٠,٦ (٦) = ٤,٦	- ٠,٦	٠,٣٦
٥	٢	ص̂٣ = ١ + ٠,٦ (٥) = ٤	٢-	٤,٠٠
٤	٦	ص̂٤ = ١ + ٠,٦ (٤) = ٣,٤	٢,٦	٦,٧٦
٥	٥	ص̂٥ = ١ + ٠,٦ (٥) = ٤	١	١,٠٠
٢	١	ص̂٦ = ١ + ٠,٦ (٢) = ٢,٢	١,٢-	١,٤٤
١٠	٧	ص̂٧ = ١ + ٠,٦ (١٠) = ٧	صفر	صفر
المجموع				١٣,٦

ومن الجدول السابق يمكن حساب الخطأ المعيارى للتقدير بإستخدام المعادلة التالية:

الخطأ المعيارى للتقدير = $\sqrt{\frac{\text{مجموع مربعات أخطاء التقدير}}{ن - ٢}}$

$= \sqrt{\frac{\text{مجـ}(ص - \hat{ص})^{٢}}{ن - ٢}}$

$= \sqrt{\frac{١٣,٦}{٧ - ٢}} = \sqrt{٢,٧٢} = ١,٦٥$

(٤) التنبؤ بالأرباح الإجمالية (ص) :

يمكن التنبؤ بقيم المتغير التابع (ص) فى السنوات المحددة بالتعويض بالقيم المتوقعة للمتغير المستقل (س) فى المعادلة المقدرة:

$\hat{ص} = ١ + ٠,٦ \text{ س}$

وذلك كما يلى:

- سنة ٢٠٠١م :

س = ٩

$\therefore \hat{ص}_{٢٠٠١} = ١ + (٠,٦ \times ٩) = ١ + ٥,٤ = \boxed{٦,٤}$

- سنة ٢٠٠٢م :

س = ٧

$\therefore \hat{ص}_{٢٠٠٢} = ١ + (٠,٦ \times ٧) = ١ + ٤,٢ = \boxed{٥,٢}$

- سنة ٢٠٠٣م :

س = ٥

$\therefore \hat{ص}_{٢٠٠١} = ١ + (٠,٦ \times ٥) = ١ + ٣ = \boxed{٤}$

ويتضح من نتائج التنبؤ أنه كلما قلت الكمية المباعة (س) كلما قلت الأرباح ($\hat{ص}$) ، مما يبرز طردية العلاقة بين المتغيرين (س ، ص).

تمارين على الفصل الثاني

(١) أوجد المعادلة والميل لكل خط من الخطوط التالية:

(أ) الخط المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٣ ، ١).

(ب) الخط المار بالنقطتين (-١ ، ٢) ، (٥ ، ٢).

(ت) الخط المار بالنقطتين (٣ ، صفر) ، (صفر ، -٤).

(٢) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٢ ، -١) ، في كل من الحالات التالية :

(أ) إذا كان ميل المستقيم = م = $\frac{١}{٢}$

(ب) إذا كان ميل المستقيم = م = -١

(ت) إذا كان ميل المستقيم = م = صفر

(٣) أوجد البعد بين النقطتين أ (٧ ، ٦) ، ب (١ ، -٢). ثم أوجد معادلة الخط المستقيم أب ، واستنتج ميله ؟.

(٤) قدر مدير التكاليف في أحد المصانع أن التكاليف الثابتة بالمصنع ٥٠٠٠ جنيه ، بينما وجد أن التكاليف المتغيرة هي ٢٥ جنيه للوحدة المنتجة ، المطلوب إيجاد المعادلة التي توضح العلاقة بين التكلفة والإنتاج ، وما هي التكاليف الكلية التي تمكن المصنع من إنتاج ١٠٠ وحدة ؟.

(٥) وجدت إحدى شركات إستخراج المعادن أنها يمكنها إستخراج ٧ طن من معدن معين بتكلفة قدرها ١٥٠٠ جنيه ، في حين أنها يمكنها إستخراج ١٢ طن من بتكلفة قدرها ١٨٠٠ جنيه ، المطلوب إيجاد التكاليف الثابتة وكذلك التكاليف المتغيرة بفرض اننا نتبع النموذج الخطي ، وما هي تكاليف إستخراج ٢٥ طن من ذلك المعدن موضع الدراسة ؟

(٦) بفــرض أن العلاقة بين المتغيرين (س ، ص) علاقة خطية ؛ حيث: ص = د (س) ، وأنـــه أمكـــن تقديـــر هـــذه العلاقـــة بإستخدام طريقة المربعات الصغرى ، وكانت النتائج كما يلى :

أ = ١٠ ، بَ = ٢

فاشرح مدلول هذين الرقمين ، ثم أكتب المعادلة المقدرة التى تربط بين المتغيرين (س ، ص).

(٧) أعد إجابة السؤال السابق بفرض أن: أ = ١٠٠ ، بَ = -٢

(٨) إستخدم طريقة المربعات الصغرى لتقدير معادلتى الخط المستقيم:

ص = أ١ + ب١ س ، س = أ٢ + ب٢ ص

بفرض أن :

مجـــس ص = ١٠٥٠ ، مجـــس = ١٥ ، مجـــص = ٦٠

مجـــس٢ = ٥٥ ، مجـــص٢ = ٣٩٥ ، ن = ١٠

وأشرح مدلول هاتين المعادلتين وفسر ما تصل إليه من نتائج.

(٩) بفــرض أن البيانات التالية تمثل الكمية المباعة (ص) من أحد المنتجات ، وسعر بيع هذا المنتج (س) فى الفترة الزمنية: ٩٧-٢٠٠٢ ؛ حيث: ص = د (س)

السنة	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠	٢٠٠١	٢٠٠٢
سعر البيع	٣	٢	١	٤	٦	١٠
الكمية المباعة	١٠	١٥	٢٠	١٠	٨	٤

وبفــرض أنـــك إعتـــبرت أن العلاقـــة بين سعر البيع والكمية المباعة علاقة خطية فالمطلوب:

أولاً: تقديـــر المعادلـــة الخطية التى تربط بين المتغيرين بإستخدام طريقة المربعات الصغرى ، وفسر ما تصل إليه من نتائج.

ثانياً: حساب الخطأ المعيارى للتقدير.

ثالثاً: التنبؤ بالكمية المباعة فى السنوات: ٢٠٠٣ ، ٢٠٠٤ ، ٢٠٠٥م إذا علمت أن سعر البيع المتوقع فى هذه السنوات الثلاث:٨ ، ٦ ، ٥ على الترتيب.

(١٠) إذا كانت الدالة التالية تمثل العلاقة المقدرة بين حجم الطلب على سلعة ما (ط) وسعر بيع هذه السلعة (س):

$$\hat{ط} = ٢٠٠٠ - ٧ س$$

المطلوب :

(أ) شرح مدلول هذه الدالة وما تشير إليه من طبيعة العلاقة بين حجم الطلب وسعر البيع.

(ب) إذا كان المستهدف هو زيادة حجم المبيعات من السلعة إلى ١٥٠٠ وحدة ، فما هو سعر البيع الذى نتوقع أن يحقق لنا هذا المستوى من المبيعات ؟

(ت) إذا كان من المتوقع حدوث زيادة فى سعر بيع السلعة قدرها ١٥ جنيه ؛ فكيف سيكون تأثير ذلك على الكمية المطلوبة من هذه السلعة ؟

(١١) أعطيت دالة العرض التالية (مقدرة بإستخدام طريقة أصغر المربعات):

$$\hat{ع} = ١٠ + ٥٠ س$$

حيث:

$\hat{ع}$: تقدير الكمية المعروضة من السلعة.

س : سعر بيع السلعة.

فاشـــرح مـــا تعكسه الدالة السابقة من مؤشرات عن طبيعة العلاقة بين سـعر بـيع السلعة والكمية العروضة منها ، ثم إستخدم هذه الدالة فى التنبؤ بالكمية المعروضة من هذه السلعة عند مستويات الأسعار الأتية:

١٥ ، ١٠ ، ٢٠ ج

وإذا كان من المتوقع حدوث إنخفاض فى سعر بيع السلعة قدره (١٠ ج) ، وضح إنعكاس ذلك على الكمية المعروضة من هذه السلعة.

(١٢) إذا كانـت التكاليف الثابتة في إحدى الشركات لإنتاج ٢٠٠ وحدة مـن سلعة معينة هي ٢٥٠٠ جنيه ، بينما كانت التكاليف الكلية لإنتاج نفس الوحدات هي ٣٣٠٠ جنيه ، المطلوب :

(أ) أكتـب المعادلة التي توضح العلاقة بين التكلفة والإنتاج بفرض خطية تلك العلاقة ؟٠

(ب) عند بيع كل وحدة منتجة بسعر ٥,٢٥ جنيه أوجد نقطة التعادل

(ت) مـا عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها حتى يكون الربح المحقق ٢٠٠ جنيه ؟٠

(١٣) شـركة إنـتاج أحذية تصل إلى نقطة التعادل إذا كان إنتاجها هو ١٨٠٠٠٠ جنـيه ، فـإذا كانت التكاليف الثابتة السنوية هي ٤٥٠٠٠ جنـيه ، وكـل زوج من الأحذية المنتجة يُباع بـ ٣٠ جنيه ، المطلوب إيجاد متوسط التكلفة المتغيرة لزوج الأحذية الواحد ؟

(١٤) عـند سعر قدره ٥٠ جنيه للطن كان الطلب على سلعة معينة هو ٤٥٠٠ طـن بيـنما كـان المعروض منها ٣٥٠٠ طن ، وبزيادة السعر بمقـدار ١٥ جنـيه للطـن فـإن الطلب والعرض للسلعة سوف يكونان ٤٣٠٠ ، ٤٠٠٠ طن على التوالي ، والمطلوب : تقدير معادلتيْ الطلب والعرض بفرض إتباع النموذج الخطي ؟٠

الفصل الثالث

تحليل السلاسل الزمنية

- مقدمة .
- عناصر السلسلة الزمنية .
- قياس الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى .
- قياس التغيرات الموسمية بطريقة المتوسطات البسيطة .
- التنبؤ بقيمة الظاهرة موسمياً .

(٣-١) مقدمة

السلسلة الزمنية هي مجموعة الأرقام الناتجة من تتبع ظاهرة معينة خلال فترة من الزمن تكون طويلة نسبياً ، وتسجيل هذه المشاهدات في فترات يحسن أن تكون منتظمة ٠

وأهم الأهداف التي تحققها دراسة السلاسل الزمنية ما يلي :

١. التعرف على التغيرات التي تطرأ على قيم الظاهرة مع الفترات الزمنية المختلفة ٠
٢. التعرف على أنواع التغيرات التي تطرأ على قيم الظاهرة والتي تتأثر بها
٣. دراسة التغيرات التي تتأثر بها الظاهرة والتعرف على أسبابها ونتائجها ٠
٤. التعرف على علاقة إرتباط هذه الظاهرة المدروسة بغيرها من الظواهر الأخرى ٠
٥. التنبؤ بقيم هذه الظاهرة مستقبلاً ، أي في غير أوقات التسجيل ، بافتراض إستمرار الظروف المحيطة بقيم الظاهرة ٠

ومثال للسلاسل الزمنية :

عدد السكان في جمهورية مصر العربية في التعدادات المتتابعة كما يتضح مما يلي :

سنوات التعداد	١٩٠٧	١٩١٧	١٩٢٧	١٩٣٧	١٩٤٧	١٩٦٠
عدد السكان (بالمليون)	١١,٤	١٢,٧	١٤,٢	١٥,٩	١٩	٢٦

(٣-٢) عناصر السلسلة الزمنية :

تتمثل عناصر السلسلة الزمنية في التغيرات التالية :

(١) التغيرات طويلة الأجل (الإتجاه العام) :

وهـــو الطريق الذي تتخذه البيانات أو الظواهر لفترة طويلة من الزمن ما لم تتأثر بالتغيرات الأخرى ، وقد يكون التغير في إتجاه واحد إما إلى الزيادة أو النقصان، وفي هذه الحالة يأخذ الشكل العام للظاهرة معادلة الخط المستقيم على الصورة :

ص = أ + ب س

وقد تتجه الظاهرة إلى الزيادة فترة طويلة من الزمن ثم تتجه بعدها إلى النقصان ، كما قد يحدث العكس ، وفي هذه الحالة تكون الصورة العامة لقيم الظاهرة من الدرجة الثانية أوما فوقها حسب عدد نقط الإنقلاب في خط سير الظاهرة

(٢) التغيرات الموسمية :

وهـــي تغـيرات منـــتظمة تتأثر بها الظاهرة خلال فترات زمنية أقصـــاها ســـنة ، ففي كثير من الظواهر نجد تغيراً في مواسم قد تكون ربـــع ســـنوية أو شـــهرية أو أسبوعية ، والتغير في مثل هذه الأحوال يُســـمى تغـيراً موســـمياً ، حيث يتكرر التأثير الموسمي ويعيد إتجاهه وســـيره كـل فترة ، مع ملاحظة أن الفترة قد تكون يوماً أو أسبوعاً أو شهراً أو فصلاً من السنة .

(٣) التغيرات الدورية :

وهـــي تغـيرات تطرأ على السلسلة الزمنية في فترات متباعدة تكـــون مدتهـــا ثـــلاث سنوات أو أكثر (تصل إلى ١١ سنة) ، وهي أقل إنـــتظاماً من التغيرات الموسمية التي تختلف فيها كل دورة عن الأخرى

مـــن حيث طولها وقوتها ، وأوضح مثال للتغيرات الدورية هو الأزمات الإقتصـــادية التي تنتاب معظم الظواهر التجارية والمالية في ظل النظام الرأسمالي غير الموجه (كل ١٠ سنوات تقريباً) ٠

(٤) التغيرات العرضية أو الفجائية :

وتحـــدث هـــذه التغـــيرات نتـــيجة لعوامل فجائية عرضية غير منـــتظمة وغـــير متوقعة تؤثر على الظواهر المختلفة ، ومن أمثلتها ، الحـــروب والثورات الفجائية والأوبئة والمجاعات والزلازل والبراكين ٠ ولمـــا كان من المستحيل معرفة الوقت الذي تقع فيه هذه الحوادث ، فلا يمكن التنبؤ بمدى تأثيرها على الظواهر ٠

وإذا رمـــزنا للقـــيمة الفعلية للظاهرة بالرمز (ص) ، وللإتجاه العـــام بالرمـــز (جـــ) ، وللتغيرات الموسمية بالرمز (م) ، وللتغيرات الدورية بالرمز (د) ، وللتغيرات الفجائية بالرمز (ع) ، فإن :

ص = جـ × م × د × ع

ولســـوف نقتصـــر فـــي هذا الجزء على دراسة الإتجاه العام والتغيرات الموسمية ٠

(٣-٣) قياس الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى :

لقد سبق ذكر أن معادلة الخط المستقيم تأخذ الصورة :

ص = أ + ب س

ويمكنـــنا إعتـــبار أن (ص) تمـــثل قيمة الظاهرة (المتغير التابع) ، (أ) هـــي القـــيمة الإتجاهـــية للظاهـــرة في الفترة الزمنية التي تتخذ كأســـاس عـــند إيجاد معادلة الخط المستقيم ، وهو الثابت الذي يساوي (ص) عـــندما (س يســـاوي صفر) ، (ب) هي معدل التغير في وحدة الزمـــن أو ميل خط الإتجاه العام ، ويوضح كمية الزيادة أو النقص في

(ص) لكل وحدة تغير في (س) ، حيث (س) المتغير المستقل (أو البعد الزمني عن نقطة الأصل) •

ملحوظة :

لكـــي ويكـــون الخـــط الموفق ممثلاً أحسن تمثيل ، نقوم بتحديد قـيمة (أ ، ب) بحيـــث يكون مجموع مربعات إنحرافات النقط على الخط أصـــغر مـــا يمكـــن •ولكي يكون هذه المجموع أصغر ما يمكن يجب أن يكـــون مجمـــوع الإنحرافات نفسها مساوياً للصفر ، بأن يكون مجموع حواصـــل ضـــرب كـــل إنحراف في الإحداثي الأفقي المناظر له مساوياً للصـــفر أيضـــاً • وهـــذا الخـــط السابق يُعرف بخط المربعات الصغرى (الدنـــيا) ، وتُعرف الطريقة أيضاً بطريقة المربعات الصغرى التي سبق وأن أشرنا إليها في الفصل السابق •

وقـــد ذكـــرنا أنـــه لإيجـــاد قيمتـــيْ (أ ، ب) في معادلة الخط المستقيم ، يُستخدم المعادلتيْن الآتيتيْن :

$$\text{مجـ}_{ص} = أ\,ن + ن\,\text{مجـ}_{س}$$

$$\text{مجـ}_{س\,ص} = أ\,\text{مجـ}_{س} + ب\,\text{مجـ}_{س^2}$$

أو يمكن الحصول على قيمتي (أ ،ب) مباشرة على النحو التالي :

$$ب = \frac{\text{مجـ}_{س\,ص} - \frac{(\text{مجـ}_{س})(\text{مجـ}_{ص})}{ن}}{\text{مجـ}_{س^2} - \frac{(\text{مجـ}_{س})^2}{ن}}$$

$$أ = \frac{\text{مجـ}_{ص}}{ن} - ب\,\frac{\text{مجـ}_{س}}{ن}$$

والمثال التالي يوضح كيفية قياس الإتجاه العام إذا كانت البيانات يمثلها خط مستقيم على الصورة : ص = أ + ب س

مثال (١)

بافتراض توافر البيانات التالية :

السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩
قيم الظاهرة (ص)	٤	٦	١٠	١٥	٢٥

نجـد أنه بإتخاذ سنة ١٩٩٥ كسنة أساس ، فإنه يمكننا تكوين الجدول التالـي تمهيداً لتقدير (أ ، ب) ، حيث (س) تمثل هنا البعد الزمني عن سنة الأساس :

السنة	ص	ص	$س^٢$	س ص
١٩٩٥	٤	صفر	صفر	صفر
١٩٩٦	٦	١	١	٦
١٩٩٧	١٠	٢	٤	٢٠
١٩٩٨	١٥	٣	٩	٤٥
١٩٩٩	٢٥	٤	١٦	١٠٠
المجموع	٦٠	١٠	٣٠	١٧١

ويتضح من الجدول السابق أن :

$مجـ_{ص} = ٦٠$ ، $مجـ_{س} = ١٠$ ، $مجـ_{س ص} = ١٧١$ ،

$مجـ_{س^٢} = ٣٠$ ، $ن = ٥$

وعلى ذلك يمكن إيجاد الثابتين (أ ، ب) بالتعويض بهذه المجاميع في المعادلتين :

$مجـ_{ص} = أ ن + ن مجـ_{س}$

$مجـ_{س ص} = أ مجـ_{س} + ب مجـ_{س^٢}$

∴ ٦٠ = ٥ أ + ١٠ ب (١)

١٧١ = ١٠ أ + ٣٠ ب (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على الثابتين (أ ، ب) كما يلي :

بضرب المعادلة (١) × ٢

∴ ١٢٠ = ١٠ أ + ٢٠ ب (٣)

بطرح المعادلة (٣) من المعادلة (٢) :

∴ ٥١ = ١٠ ب (٤)

ومن المعادلة (٤) نجد أن :

$$\therefore ب = \frac{٥١}{١٠} = \boxed{٥,١}$$

وبالتعويض عن قيمة (ب) في المعادلة (١) :

∴ ٦٠ = ٥ أ + ١٠ (٥,١)

∴ ٦٠ − ٥١ = ٥ أ

∴ ٩ = ٥ أ

$$\therefore أ = \frac{٩}{٥} = \boxed{١,٨}$$

ومـــن ناحية أخرى يمكن إيجاد الثابتين (أ ، ب) بالتعويض بالمجاميع السابقة في المعادلتين :

$$ب = \frac{مجـ س ص - \frac{(مجـ س)(مجـ ص)}{ن}}{مجـ س^{٢} - \frac{(مجـ س)^{٢}}{ن}} \qquad أ = \frac{مجـ ص}{ن} - ب \frac{مجـ س}{ن}$$

وذلك ، حيث :

$$ب = \frac{١٧١ - \frac{٦٠ \times ١٠}{٥}}{٣٠ - \frac{(١٠)^٢}{٥}} = \frac{١٧١ - ١٢٠}{٣٠ - ٢٠} = \frac{٥١}{١٠} = \boxed{٥,١}$$

$$، \quad أ = \frac{٦٠}{٥} - \left(٥,١ \times \frac{١٠}{٥}\right)$$

$$= ١٢ - (٥,١ \times ٢) = \boxed{١,٨}$$

وعلــى ذلــك تكون معادلة خط الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى هي :

ص = ١,٨ + ٥,١ س

(بأساس ١٩٩٥ ، س = سنة)

وللتنــبؤ بالقــيم الإتجاهــية للظاهــرة (ص) فى السنوات المستقبلية يتم الــتعويض فــي معادلــة الإتجاه العام المتوصل إليها عن (س) بالفارق الزمنــي بين السنة المراد التنبؤ بقيمة الظاهرة عندها وسنة الأساس ، أي :

س = البعد الزمني بين سنة التنبؤ وسنة الأساس

فمــثلاً : إذا كــان المطلــوب هــو التنبؤ بقيمة الظاهرة (ص) في سنة ٢٠٠٥م ، يكون :

س = ٢٠٠٥ − ١٩٩٥ = ١٠ ســنوات وبالتعويض عن س = ١٠ في معادلة الإتجاه العام المتوصل إليها :

$$\therefore ص_{٢٠٠٥} = ١,٨ + (٥,١ \times ١٠) = ١,٨ + ٥١ = \boxed{٥٢,٨}$$

ومن ناحية ثالثة يمكن إيجاد الثابتين (أ ، ب) بطريقة مختصرة بجعل سنة الأساس (نقطة الأصل) في منتصف السلسلة الزمنية تماماً ، وفي هذا المثال تكون سنة الأساس في هذه الحالة هي سنة ١٩٩٧ ، وفي هذه الحالة نستخدم العلاقات التالية لإيجاد الثابتين (أ ، ب) :

$$ب = \frac{\text{مجـ}_{\text{س ص}}}{\text{مجـ}_{\text{س}^2}} \quad ، \quad أ = \frac{\text{مجـ}_{\text{ص}}}{\text{ن}}$$

وفي هذه الحالة لن تختلف قيمة (ب) ، ولكن ستختلف قيمة (أ) ، لتغيُر سنة الأساس ، أما القيم الإتجاهية فلن تختلف عن تلك التي حصلنا عليها من قبل ، ويتضح ذلك من خلال إعادة حل المثال السابق بالطريقة المختصرة .

ففي المثال السابق :

بجعل سنة الأساس في منتصف السلسلة الزمنية ، أي أن سنة ١٩٩٧ هي سنة الأساس ، وتكون :

س = السنة – سنة الأساس

وبالتالي نكون الجدول التالي :

السنة	ص	س	س^٢	س ص
١٩٩٥	٤	٢–	٤	٨ –
١٩٩٦	٦	١–	١	٦ –
١٩٩٧	١٠	صفر	صفر	صفر
١٩٩٨	١٥	١	١	١٥
١٩٩٩	٢٥	٢	٤	٥٠
المجموع	٦٠	صفر	١٠	٥١

وعلى ذلك ، يكون :

∴ مجـ ص = ٦٠ مجـ س ص = ٥١ مجـ س٢ = ١٠ ، ن = ٥

وبالتعويض بهذه المجاميع السابقة نجد أن :

$$ب = \frac{مجـ\ س ص}{مجـ\ س^2} = \frac{٥١}{١٠} = \boxed{٥,١}$$

$$، \quad أ = \frac{مجـ\ ص}{ن} = \frac{٦٠}{٥} = \boxed{١٢}$$

وعلـــى ذلـــك تكون معادلة خط الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى هي :

ص = ١٢ + ٥,١ س

(بأساس ١٩٩٧ ، س = سنة)

وللتنـــبؤ بالقـــيم الإتجاهـــية للظاهـــرة (ص) فى السنوات المستقبلية يتم الـــتعويض فـــي معادلـــة الإتجاه العام المتوصل إليها عن (س) بالفارق الزمنـــي بيـــن السنة المراد التنبؤ بقيمة الظاهرة عندها وسنة الأساس وهي سنة ١٩٩٧ ، أي :

فعند التنبؤ بقيمة الظاهرة (ص) في سنة ٢٠٠٥م ، يكون :

س = ٢٠٠٥ – ١٩٩٧ = ٨ سنوات

وبالتعويض عن س = ٨ في معادلة الإتجاه العام المتوصل إليها :

ص = ١٢ + ٥,١ س

$$∴ ص_{٢٠٠٥} = ١٢ + (٥,١ \times ٨) = ١٢ + ٤٠,٨ = \boxed{٥٢,٨}$$

وهـــي نفـــس النتيجة التي سبق أن توصلنا إليها في الطريقة المطولة السابقة ٠

ملحوظة هامة :

عند استخدام الطريقة المختصرة في تقدير معادلة الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى ، فإنه لإيجاد المتغير (س) يتم إفتراض نقطة أصل من بين سنوات السلسلة الزمنية ، وغالباً ما يتم أخذ منتصف السلسلة الزمنية كنقطة أصل بحيث يكون مجـس = صفر ، وتكون :

- ☐ س = السنة – نقطة الأصل (إذا كان عدد السنوات فردي)
- ☐ س = (السنة – نقطة الأصل) × ٢ (إذا كان عدد السنوات زوجي)

ونتناول فيما يلي أمثلة تطبيقية توضح ذلك .

مثال (٢)

البيانات التالية تمثل قيم الظاهرة (ص) ، وذلك عن الفترة الزمنية (١٩٩٥-٢٠٠٠م) :

السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
الأرباح (ص)	٤	٦	١٠	١٥	٢٥	٣٠

المطلوب :

١. تقدير معادلة الإتجاه العام التي تصف الظاهرة (ص) ، باستخدام الطريقة المختصرة للمربعات الصغرى ؟
٢. التنبؤ بالظاهرة (ص) فى السنوات ٢٠٠٥ ، ٢٠١٠.

الحل :

(١) تقدير معادلة الإتجاه العام :

تكون معادلة الإتجاه العام في الصورة :ص̂ = أ̂ + ب̂ س

وفي هذه الحالة يتم أخذ منتصف السلسلة الزمنية كنقطة أصل بحيث يكون مجـس = صفر ، وحيث أن عدد سنوات السلسلة عدد زوجي فإن :

س = (السنة – نقطة الأصل) × ٢

وباعتبار نقطة الأصل منتصف السلسلة الزمنية وهي ١٩٩٧,٥ ،أي أن

س = (السنة – ١٩٩٧,٥) × ٢

وبالتالي يمكن حساب كل من المجاميع : مجـص ، مجـس ص ، مجـ$_{س^٢}$ ، من خلال تكوين الجدول التالي:

السنة	س	ص	س ص	س^٢
١٩٩٥	٥-	٤	٢٠-	٢٥
١٩٩٦	٣-	٦	١٨-	٩
١٩٩٧	١-	١٠	١٠-	١
١٩٩٧,٥				
١٩٩٨	١	١٥	١٥	١
١٩٩٩	٣	٢٥	٧٥	٩
٢٠٠٠	٥	٣٠	١٥٠	٢٥
المجموع	--	٩٠	١٩٢	٧٠

∴ مجـص = ٩٠ مجـس ص = ١٩٢ مجـ$_{س^٢}$ = ٧٠ ، ن = ٦

وبالتعويض بهذه المجاميع السابقة نجد أن :

$$ب = \frac{\text{مجـ}_{\text{س ص}}}{\text{مجـ}_{\text{س}^٢}} = \frac{١٩٢}{٧٠} = \boxed{٢,٧}$$

$$، \quad أ = \frac{\text{مجـ}_{\text{ص}}}{\text{ن}} = \frac{٩٠}{٦} = \boxed{١٥}$$

وعلى ذلك فإن معادلة الإتجاه العام المقدرة هي :

صَ = ١٥ + ٢,٧ س

(بأساس ٩٧-١٩٩٨ ، س = نصف سنة)

(٢) التنبؤ بالظاهرة (ص) :

يمكـــن التنبؤ بالظاهرة (ص) فى السنوات المحددة بالتعويض عن (س) فى المعادلة المقدرة حيث :

س = (السنة موضع التنبؤ – نقطة الأصل) × ٢

= (السنة موضع التنبؤ – ١٩٩٧,٥) × ٢

وذلك كما يلى:

- سنة ٢٠٠٥م :

س = (٢٠٠٥ – ١٩٩٧,٥) × ٢ = ١٥

∴ ص٢٠٠٥ = ١٥ + (٢,٧ × ١٥) = ١٥ + ٤٠,٥ = **٥٥,٥**

- سنة ٢٠١٠م :

س = (٢٠١٠ – ١٩٩٧,٥) × ٢ = ٢٥

∴ ص٢٠١٠ = ١٥ + (٢,٧ × ٢٥) = ١٥ + ٦٧,٥ = **٨٢,٥**

تعديل معادلة الإتجاه العام :

نبين فيما يلي كيفية إجراء بعض التعديلات على معادلة الإتجاه العام تتعلق بالبعد الزمني (س) أو تغيير سنة الأساس :

☒ التعبير عن البعد الزمني (س) بالسنة بدلاً من النصف سنة :

يمكن تحقيق ذلك عن طريق ضرب (س) فقط × (٢) ، وبالتطبيق على معادلة الإتجاه العام في المثال السابق ، فإن

ص = ١٥ + ٢,٧ (٢س)

ص = ١٥ + ٥,٤ س

(بأساس ٩٧-١٩٩٨ ، س = سنة)

☒ **تغيير سنة الأساس :**

لتغيـــير سنة الأساس من سنة (٩٧-١٩٩٨) إلى سنة ١٩٩٨ مـــثلاً ، يعني ذلك تحريك سنة الأساس (نصف سنة) ويكون ذلك بإضافة $\frac{١}{٢}$ للمتغير (س) ، أي نستبدل (س) بـ (س+$\frac{١}{٢}$) ، وعلى ذلك :

$$\hat{ص} = ١٥ + ٥,٤ \left(س + \frac{١}{٢} \right)$$

$$\hat{ص} = ١٥ + ٥,٤ \text{ س} + ٢,٧$$

$$\hat{ص} = ١٧,٧ + ٥,٤ \text{ س}$$

(بأساس ١٩٩٨ ، س = سنة)

ولإســتخدام الصورة السابقة في التنبؤ بالظاهرة (ص) يتم التعويض عن (س) فى المعادلة حيث :

س = (السنة موضع التنبؤ - ١٩٩٨)

- ففي سنة ٢٠٠٥م :

س = (٢٠٠٥ - ١٩٩٨) = ٧

$\therefore \hat{ص}_{٢٠٠٥} = ١٧,٧ + (٥,٤ \times ٧) = ١٧,٧ + ٣٧,٨ = \boxed{٥٥,٥}$

وهي نفس النتيجة السابقة •

مثال (٣)

بالتطبـــيق علـــى بـــيانات المثال السابق ، المطلوب لإستخدام الطريقة المطولـــة للمـــربعات الصـــغرى في تقدير معادلة الإتجاه العام للظاهرة (ص) ، والتنبؤ بالظاهرة (ص) فى سنة ٢٠٠٥ ؟.

الحــل :

(١) تقدير معادلة الإتجاه العام :

تكون معادلة الإتجاه العام في الصورة : صَ = أ + بْ س

نجــد أنه بإتخاذ سنة ١٩٩٥ كسنة أساس ، فإنه يمكننا تكوين الجدول التالي تمهيداً لتقدير (أ ، بْ) ، حيث (س) تمثل هنا البعد الزمني عن سنة الأساس :

السنة	ص	س	$س^٢$	س ص
١٩٩٥	٤	صفر	صفر	صفر
١٩٩٦	٦	١	١	٦
١٩٩٧	١٠	٢	٤	٢٠
١٩٩٨	١٥	٣	٩	٤٥
١٩٩٩	٢٥	٤	١٦	١٠٠
٢٠٠٠	٣٠	٥	٢٥	١٥٠
المجموع	٩٠	١٥	٥٥	٣٢١

ويتضح من الجدول السابق أن :

$مجـ_{ص} = ٩٠$ ، $مجـ_{س} = ١٥$ ، $مجـ_{س ص} = ٣٢١$ ،

$مجـ_{س^٢} = ٥٥$ ، $ن = ٦$

ومــن ناحية أخرى يمكن إيجاد الثابتين (أ ، بْ) بالتعويض بالمجاميع السابقة في المعادلتين التاليتين :

$$بْ = \frac{مجـ س ص - \frac{(مجـ س)(مجـ ص)}{ن}}{مجـ س^٢ - \frac{(مجـ س)^٢}{ن}} \qquad أ = \frac{مجـ ص}{ن} - ب \frac{مجـ س}{ن}$$

وذلك ، حيث :

$$ب = \frac{٣٢١ - \frac{١٥ \times ٩٠}{٦}}{٥٥ - \frac{(١٥)^٢}{٦}} = \frac{٣٢١ - ٢٢٥}{٥٥ - ٣٧,٥} = \frac{٩٦}{١٧,٥} = \boxed{٥,٤}$$

$$، \quad أ = \frac{٩٠}{٦} - \left(٥,٤ \times \frac{١٥}{٦}\right)$$

$$= ١٥ - (٥,٤ \times ٢,٥) = \boxed{١,٥}$$

وعلى ذلك تكون معادلة خط الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى هي :

ص = ١,٥ + ٥,٤ س

(بأساس ١٩٩٥ ، س = سنة)

وباستخدام هذه المعادلة يمكن التنبؤ بالقيم الإتجاهية للظاهرة (ص) فى السنوات المستقبلية حيث يتم التعويض في المعادلة عن (س) بالفارق الزمني بين السنة المراد التنبؤ بقيمة الظاهرة عندها وسنة الأساس وهي سنة ١٩٩٥ ، أي :

في سنة ٢٠٠٥م ، يكون :

س = ٢٠٠٥ – ١٩٩٥ = ١٠ سنوات

$$\therefore ص_{٢٠٠٥} = ١,٥ + (٥,٤ \times ١٠) = ١,٥ + ٥٤ = \boxed{٥٥,٥}$$

وهي نفس النتيجة التي سبق أن توصلنا إليها في الطريقة المختصرة السابقة .

مثال (٤)

البيانات التالية تمثل إنتاج شركة بترول (بالمليون برميل) (ص) ، وذلك عن الفترة الزمنية (١٩٩٦-٢٠٠٠م) ، حيث :

السنة	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
كمية الإنتاج (ص)	٣	٥	٨	٩	١٠

المطلوب :

١. تقدير معادلة الإتجاه العام التي تصف الكمية المنتجة (ص) ، كدالة في الزمن (س) بطريقة المربعات الصغرى ؟

٢. التنبؤ بالكميات المنتجة (ص) فى السنوات ٢٠٠٥ ، ٢٠١٠ ؟

الحل :

(١) تقدير معادلة الإتجاه العام :

تكون معادلة الإتجاه في الصورة : $\hat{ص} = \hat{أ} + \hat{ب}س$

وفي هذه الحالة نجد أن (ص) تمثل قيم الظاهرة موضع الدراسة ، ولإيجاد المتغير (س) يتم إفتراض نقطة أصل في منتصف السلسلة الزمنية بحيث يكون $مجـ_{س}$ = صفر .

وباعتبار نقطة الأصل منتصف السلسلة الزمنية وهي سنة ١٩٩٨ ، فإنه يمكن حساب كل من المجاميع : $مجـ_{ص}$ ، $مجـ_{س ص}$ ، $مجـ_{س^٢}$ ، من خلال تكوين الجدول التالى:

السنة	س	ص	س ص	$س^2$
١٩٩٦	-٢	٣	-٦	٤
١٩٩٧	-١	٥	-٥	١
١٩٩٨	صفر	٨	صفر	صفر
١٩٩٩	١	٩	٩	١
٢٠٠٠	٢	١٠	٢٠	٤
المجموع	--	٣٥	١٨	١٠

∴ $مجـ_{ص} = ٣٥$ ، $مجـ_{س ص} = ١٨$ ، $مجـ_{س^2} = ١٠$ ، ن = ٥

∴ $ب = \frac{مجـ_{س ص}}{مجـ_{س^2}} = \frac{١٨}{١٠} = \boxed{١,٨٠}$

، $أ = \frac{مجـ_{ص}}{ن} = \frac{٣٥}{٥} = \boxed{٧}$

وعلى ذلك فإن معادلة الإتجاه العام المقدرة هي :

$\hat{ص} = ٧ + ١,٨$ س

(بأساس ١٩٩٨ ، س = سنة)

(٢) التنبؤ بالكميات المنتجة (ص) :

يمكن التنبؤ بالكميات المنتجة (ص) فى السنوات المحددة بالتعويض عن (س) فى المعادلة المقدرة حيث :

س = السنة موضع التنبؤ – ١٩٩٨ (لأن عدد السنوات فردي)

- سنة ٢٠٠٥م :

س = ٢٠٠٥ – ١٩٩٨ = ٧

∴ $\hat{ص}_{٢٠٠٥} = ٧ + (١,٨ \times ٧) = ٧ + ١٢,٦ = \boxed{١٩,٦}$

- سنة ٢٠١٠م :

س = ٢٠١٠ – ١٩٩٨ = ١٢

∴ $\hat{ص}_{٢٠١٠} = ٧ + (١,٨ \times ١٢) = ٧ + ٢١,٦ = \boxed{٢٨,٦}$

مثال (٥)

البـــيانات التالية تمثل أرباح إحدى الشركات الصناعية الكبرى (بآلاف الجنيهات) (ص) ، وذلك عن الفترة الزمنية (١٩٩٥-٢٠٠٠م) :

السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
الأرباح (ص)	٢	٣	٥	٩	١٢	١١

المطلوب :

١. تقدير معادلة الإتجاه العام التي تصف الأرباح (ص) ، كدالة في الزمن (س) بطريقة المربعات الصغرى ؟

٢. التنبؤ بالأرباح (ص) فى السنوات ٢٠٠٥ ، ٢٠١٠.

الحـــل :

(١) تقدير معادلة الإتجاه العام :

تكون معادلة الإتجاه العام في الصورة : صَ = أ + بَ س

وفـــي هذه الحالة نجد أن (ص) تمثل قيم الظاهرة (الأرباح) ، ولإيجاد المتغير (س) يتم أخذ منتصف السلسلة الزمنية كنقطة أصل بحيث يكون مجـــ$_{س}$ = صفر ، وحيث أن عدد سنوات السلسلة عدد زوجي فإن :

س = (السنة – نقطة الأصل) × ٢

وباعتــبار نقطة الأصل منتصف السلسلة الزمنية وهي ١٩٩٧,٥ ، فإنه يمكن حساب كل من المجاميع : مجـــ$_{س}$ ، مجـــ$_{س ص}$ ، مجـــ$_{س^٢}$ ، من خلال تكوين الجدول التالى:

السنة	س	ص	س ص	$س^٢$
١٩٩٥	٥-	٢	١٠-	٢٥
١٩٩٦	٣-	٣	٩-	٩
١٩٩٧	١-	٥	٥-	١
١٩٩٧,٥				
١٩٩٨	١	٩	٩	١
١٩٩٩	٣	١٢	٣٦	٩
٢٠٠٠	٥	١١	٥٥	٢٥
المجموع	--	٤٢	٧٦	٧٠

∴ $مجـ_{ص}$=٤٢ $مجـ_{س ص}$= ٧٦ $مجـ_{س^٢}$ = ٧٠ ، ن = ٦

$$\therefore ب = \frac{مجـ_{س ص}}{مجـ_{س^٢}} = \frac{٧٦}{٧٠} = \boxed{١,٠٩}$$

$$، أ = \frac{مجـ_{ص}}{ن} = \frac{٤٢}{٦} = \boxed{٧}$$

وعلى ذلك فإن معادلة الإتجاه العام المقدرة هي :

ص = ٧ + ١,٠٩ س

(بأساس ٩٧-١٩٩٨ ، س = نصف سنة)

(٢) التنبؤ بالأرباح (ص) :

س = (السنة موضع التنبؤ – ١٩٩٧,٥) × ٢

- سنة ٢٠٠٥م :

س = (٢٠٠٥ – ١٩٩٧,٥) × ٢ = ١٥

∴ $ص_{٢٠٠٥}$= ٧ + (١٥ × ١,٠٩) = ٧ + ١٦,٣٥ = $\boxed{٢٣,٣٥}$

- سنة ٢٠١٠م :

س = (٢٠١٠ – ١٩٩٧,٥) × ٢ = ٢٥

∴ $ص_{٢٠١٠}$ = ٧ + (٢٥ × ١,٠٩)= ٧ + ٢٧,٢٥ = $\boxed{٣٤,٢٥}$

(٣-٤) قياس التغيرات الموسمية بطريقة المتوسطات البسيطة :

(النسب الموسمية – الرقم القياسي للتغيرات الموسمية)

وهـنا نجـد أنه لحساب الرقم القياسي للتغيرات الموسمية نتبع الخطوات التالية :

١. نحسـب متوسط قيم كل موسم لجميع السنوات ، سواءاً كان الموسم يوماً أو أسبوعاً أو شهراً أو ربع سنة ٠٠٠٠ إلخ

٢. نحسب المتوسط العام وهة متوسط المتوسطات الحسابية للمواسم.

٣. نوجـد النسـبة بين كل متوسط موسمي والمتوسط العام ، ونضرب هـذه النسـبة × ١٠٠ ، لنحصـل علـى ما يُسمى بالرقم القياسي للتغيرات الموسمية (أو النسب الموسمية)

مثال (٦)

إذا كـان الجـدول التالـي يمثل مبيعات إحدى الشركات (بآلاف الجنيهات ، في المدة من ١٩٩٤ إلى ١٩٩٦ كل ربع سنة :

السنة	الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
١٩٩٤	٢٠	١٤	٦	١٨
١٩٩٥	١٨	٦	٨	٩
١٩٩٦	١٦	١٣	١٠	١٢

المطلوب :

حساب الرقم القياسي للتغيرات الموسمية (أو النسب الموسمية) ؟.

الحل :

يمكن حساب الرقم القياسي للتغيرات الموسمية (أو النسب الموسمية) كما يلي :

الربع \ السنة	٩٤	٩٥	٩٦	المجموع الموسمي	الوسط الموسمي	النسب الموسمية
الأول	٢٠	١٨	١٦	٥٤	١٨	٪١٤٤
الثاني	١٤	٦	١٣	٣٣	١١	٪٨٨
الثالث	٦	٨	١٠	٢٤	٨	٪٦٤
الرابع	١٨	٩	١٢	٣٩	١٣	٪١٠٤
المجموع					٥٠	٤٠٠

وحيث أن :الوسط العام = $\frac{٥٠}{٤٠٠}$ = ١٢,٥ ٪

∴ الرقم القياسي للتغيرات الموسمية للربع الأول = $\frac{١٨}{١٢,٥}$ ٪ = ١٤٤ ٪

∴ الرقم القياسي للتغيرات الموسمية للربع الثاني = $\frac{١١}{١٢,٥}$ ٪ = ٨٨ ٪

∴ الرقم القياسي للتغيرات الموسمية للربع الثالث= $\frac{٨}{١٢,٥}$ ٪ = ٦٤ ٪

∴ الرقم القياسي للتغيرات الموسمية للربع الرابع = $\frac{١٣}{١٢,٥}$ ٪ = ١٠٤ ٪

(٣-٥) التنبؤ بقيمة الظاهرة موسمياً :

نبين فيما يلي كيفية التنبؤ بقيمة الظاهرة موسمياً في أي من الحالتين التاليتين :

١. إذا كانت القيم السنوية لا تتأثر بالإتجاه العام بشكل واضح .

٢. إذا كان الإتجاه العام يؤثر بشكل واضح في القيم السنوية .

الحالة الأولى : إذا كانت القيم السنوية لا تتأثر بالإتجاه العام بشكل واضح : وفي هذه الحالة يتم ضرب متوسط الفترة الأخيرة × الرقم القياسي للتغيرات الموسمية في كل ربع السنة .

فمثلاً : إذا أردنا التنبؤ بالمبيعات في الربع الثاني من عام ١٩٩٧ ، نتبع ما يلي :

$$\text{مبيعات الربع الثاني من عام ١٩٩٧} = \text{متوسط عام ١٩٩٦} \times \frac{٨٨}{١٠٠}$$

$$= \frac{١٦+١٣+١٠+١٢}{٤} \times \frac{٨٨}{١٠٠}$$

$$= \frac{٥١}{٤} \times \frac{٨٨}{١٠٠} = ١٢,٧٥ \times ٠,٨٨ = \boxed{١١,٢٢}$$

الحالة الثانية : إذا كان الإتجاه العام يؤثر بشكل واضح في القيم السنوية : نقوم بحساب القيمة الإتجاهية للسنة المراد التنبؤ بالقيم الموسمية الخاصة بها بتقدير الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى ، ثم نحسب متوسط الفترة للسنة المطلوبة ، وذلك بقسمة القيمة الإتجاهية لهذه السنة على عدد الفترات ، ثم نحسب القيم الموسمية للفترات المختلفة بضرب المتوسط × الرقم القياسي للتغيرات الموسمية لهذه الفترات ، والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال (٧)

فيما يلي بيان بالكميات المباعة (بآلاف الوحدات) لأحد مصانع الأدوية وذلك في الفترة الزمنية (١٩٩٤-٢٠٠٠م) :

السنة	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
المبيعات	٧	١٠	١٢	١٥	١٨	١٩	٢٣

وكانت الكميات المباعة في كل ربع خلال السنوات من (١٩٩٨-٢٠٠٠) كما يلي :

الربع \ السنة	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
الأول	٥	٦	٧
الثاني	٦	٧	٨
الثالث	٣	٣	٣
الرابع	٤	٣	٥
المجموع	١٨	١٩	٢٣

المطلوب :

تقدير الكمية المتوقع بيعها في عام ٢٠٠٣م ، في كل ربع من هذه السنة ؟.

الحل :

لحل هذا المثال يجب أولاً تقدير معادلة خط الإتجاه العام، وذلك على النحو التالي :

تكون معادلة خط الإتجاه العام في الصورة :صَ = أ + بَ س

وباعتبار نقطة الأصل منتصف السلسلة الزمنية وهي ١٩٩٧ ، فإنه يمكن حساب كل من المجاميع : مجــ$_{ص}$ ، مجــ$_{س ص}$ ، مجــ$_{س^٢}$ ، من خلال تكوين الجدول التالي:

السنة	ص	س	س ص	$س^٢$
١٩٩٤	٧	٣-	٢١-	٩
١٩٩٥	١٠	٢-	٢٠-	٤
١٩٩٦	١٢	١-	١٢-	١
١٩٩٧	١٥	صفر	صفر	صفر
١٩٩٨	١٨	١	١٨	١
١٩٩٩	١٩	٢	٣٨	٤
٢٠٠٠	٢٣	٣	٦٩	٩
المجموع	١٠٤	---	٧٢	٢٨

∴ مجــ$_{ص}$= ١٠٤ مجــ$_{س ص}$= ٧٢ مجــ$_{س^٢}$ = ٢٨ ، ن = ٧

$$\therefore ب = \frac{مجــ_{س ص}}{مجــ_{س^٢}} = \frac{٧٢}{٢٨} = \boxed{٢,٥٧}$$

$$\therefore أ = \frac{مجــ_{ص}}{ن} = \frac{١٠٤}{٧} = \boxed{١٤,٨٦}$$

وعلى ذلك فإن معادلة خط الإتجاه العام المقدرة هي :

ضَ = ١٤,٨٦ + ٢,٥٧ س

(بأساس ١٩٩٧ ، س = سنة)

<u>حساب القيم الإجمالية للمبيعات في عام ٢٠٠٣م :</u>

البع (الفارق) الزمني = ٢٠٠٣ - ١٩٩٧ = ٦ سنوات .

∴ ضَ = ١٤,٨٦ + (٢,٥٧ × ٦) = <u>٣٠,٢٨</u> ألف وحدة

$$\therefore متوسط\ الربع = \frac{٣٠,٢٨}{٤} = ٧,٥٧$$

ومن هنا نستخدم هذا الرقم في تقدير المبيعات المتوقعة كل ربع سنة ، بعد حساب الرقم القياسي للتغيرات الموسمية ، ويتضح ذلك مما يلي :

حساب الرقم القياسي للتغيرات الموسمية :

يمكن حساب الرقم القياسي للتغيرات الموسمية كما يلي :

السنة / الربع	٩٨	٩٩	٢٠٠٠	المجموع الموسمي	الوسط الموسمي	النسب الموسمية
الأول	٥	٦	٧	١٨	٦	١٢٠٪
الثاني	٦	٧	٨	٢١	٧	١٤٠٪
الثالث	٣	٣	٣	٩	٣	٦٠٪
الرابع	٤	٣	٥	١٢	٤	٨٠٪
المجموع					٢٠	٤٠٠

حيث أن :الوسط العام = $\frac{٢٠}{٤٠٠}$ = ٥ ٪

∴ المبيعات المتوقعة في الربع الأول =٧,٥٧ × $\frac{١٢٠}{١٠٠}$ = ٩,٠٨

∴ المبيعات المتوقعة في الربع الثاني =٧,٥٧ × $\frac{١٤٠}{١٠٠}$ = ١٠,٦

∴ المبيعات المتوقعة في الربع الثالث =٧,٥٧ × $\frac{٦٠}{١٠٠}$ = ٤,٥٤

∴ المبيعات المتوقعة في الربع الرابع =٧,٥٧ × $\frac{٨٠}{١٠٠}$ = ٦,٠٦

المجموع = ٣٠,٢٨

تماريــن على الفصل الثالث

(١) فــيما يلــي تطــور ظاهرة معينة فى الفترة الزمنية من ١٩٩١وحتى ١٩٩٨ : -

السنة	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	١٩٧	١٩٩٨
الظاهرة (ص)	٨	١٦	١٤	٢٦	٣٠	٤٠	٣٦	٥٤

المطلوب :

١. تقديــر معادلـــة خــط الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى ، مستخدماً الطريقة المختصرة ؟

٢. لإيجــاد القــيم المــتوقعة للظاهرة (ص) فى السنوات ٢٠٠٥ ، ٢٠١٠ ؟

(٢) فــيما يلي بيان بالكميات المباعة (بآلاف الوحدات) لأحد مصانع الأدوية وذلك في الفترة الزمنية (١٩٩٥-١٩٩٩م) :

السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩
المبيعات	٢	٤	١٠	٨	١٦

المطلوب :

١. تقديــر معادلـــة خــط الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى ، مستخدماً الطريقة المختصرة ؟

٢. لإيجــاد المبــيعات المــتوقعة فى السنوات ٢٠٠٠ ، ٢٠٠٥ ، ٢٠١٠ ؟

(٣) فيما يلي بيان بالكميات المباعة (بآلاف الوحدات من المضادات الحيوية) لأحدى شركات الأدوية ، وذلك في الفترة الزمنية (١٩٩٤-٢٠٠٠م) :

السنة	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
المبيعات	٤	٨	١٠	١٢	١٥	٢٠	٢٥

وبفرض أن الكميات المباعة في كل ربع خلال السنوات من (١٩٩٨-٢٠٠٠) كما يلي :

الموسم \ السنة	١٩٩٨	١٩٩٩	٢٠٠٠
الشتاء	٤	٦	٨
الربيع	٥	٨	٩
الصيف	٤	٣	٣
الخريف	٢	٣	٥
المجموع	١٨	١٩	٢٣

المطلوب :

تقدير الكمية المتوقع بيعها في عام ٢٠٠٣م ، في كل موسم من المواسم الأربع لهذه السنة ؟.

(٤) إذا كان الرقم القياسي الربع سنوي للتغيرات الموسمية لإحدى الشركات كما يلي :

الربع الأول (٧٠) ، الربع الثاني (٨٠) ، الربع الثالث (١٢٠) ، الربع الرابع (١٣٠) ٠ فإذا كان من المتوقع أن تبلغ مبيعات هذه الشركات حوالي (٤٠ مليون جنيه) في أحد الأعوام القادمة ٠ فهل يمكنك التنبؤ بقيمة المبيعات الربع سنوية للعام المذكور ؟٠

(٥) إذا كان الرقم القياسي الربع سنوي للتغيرات الموسمية لإحدى الشركات كما يلي :

الربع سنة	١	٢	٣	٤
الرقم القياسي للتغيرات الموسمية	١٣١,٧٪	٧٨٪	٨٤,٣٪	١٠٦

فإذا كان من المتوقع أن تبلغ مبيعات هذه الشركة حوالي (٥٢ مليون جنـيه) في أحد الأعوام القادمة ٠ المطلوب إيجاد المبيعات الربع سنوية للعام المذكور ؟٠

(٦) الجـدول التالـي يمـثل مبـيعات إحدى شركات التجميل (بآلاف الجنيهات) ، في المدة من ١٩٩٨ إلى ٢٠٠٠ كل ربع سنة :

السنة	الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
١٩٩٨	١٢	١٥	٩	١٥
١٩٩٩	١٥	٩	١٢	١٢
٢٠٠٠	١٨	١٦	١٢	١٦

المطلوب :

حساب الرقم القياسي للتغيرات الموسمية (أو النسب الموسمية) ؟٠

(٧) إذا كـان تقديـر معادلـة خـط الإتجـاه العام لإحدى الظواهر الإقتصادية هي : صَ = ٥+ ٢ س

حيـث (س) هـي الزمـن مقاساً بوحدات ربع سنوية إبتداءاً من الربع الأول مـن سـنة ٢٠٠٠ ، وكانت الظاهرة تتأثر بالعوامل الموسمية ، حيـث بلـغ المعـامل الموسـمي للربع الثاني من السنة (٨٠٪) ، فما تقديرك لقيمة الظاهرة في الربع الثاني من سنة ٢٠٠٣م؟٠

(٨) إذا كـان تقديـر معادلـة خـط الإتجـاه العام لإحدى الظواهر الإقتصادية هي :

ص = ٣+ ٤ س

حيث (س = ربع سنة) بأساس الربع الثاني من سنة ٢٠٠٠

وكانـت الظاهرة تتأثر بالعوامل الموسمية ، حيث بلغ المعامل الموسمي للربع الثالث من السنة (١٢٠٪) ، المطلوب :

١. تقدير قيمة الظاهرة في الربع الأول من سنة ٢٠٠٣م؟٠

٢. تقدير قيمة الظاهرة في النصف الأخير من سنة ٢٠٠٣م؟٠

(٩) إذا كـان تقديـر معادلـة خـط الإتجـاه العام لإحدى الظواهر الإقتصادية هي :

ص = ٣+ ٢ س

حيث (س = سنة) بأساس سنة ١٩٩٠

وكانت المعاملات الموسمية ، للمواسم الأربعة هي :

١,٢ ، ٢ ، ١,٣ ، ٠,٨

المطلوب :

١. تقدير قيمة الظاهرة في الربع الثاني من سنة ٢٠٠٠م؟٠

٢. تقدير قيمة الظاهرة في النصف الأخير من سنة ٢٠٠١م؟٠

مع الأخذ في الإعتبار التغيرات الموسمية ؟٠

الفصل الرابع

المحددات والمصفوفات

- مقدمة .
- المحددات .
- مفكوك المحدد .
- إستخدام المحددات فى حل المعادلات الخطية
- المصفوفات .
- أهم العمليات الرياضية للمصفوفات .
- إستخدام المصفوفات فى حل المعادلات الخطية .
- التطبيقات التجارية للمحددات والمصفوفات

(٤-١) المحددات :

(٤-١-١) مقدمة

تحتل المحددات مكانة هامة في مجال التطبيقات الرياضية المختلفة حيث يمكن استخدام المحددات في التعبير عن العديد من المشكلات البسيطة والمعقدة من خلال عرض المشكلة في صورة موجزة وواضحة ومن ثم حل تلك المشكلة باستخدام العمليات الرياضية البسيطة الخاصة بعلم المحددات ، كما تُستخدم المحددات في حل المعادلات الخطية في مجهولين أو ثلاث مجاهيل أو بصفة عامة في (ن) من المجاهيل ، وفي هذا الأسلوب الكثير من التبسيط إذا ما قورن بطرق أخرى مثل طريقة الحذف وخاصة كلما كثر عدد المعادلات وبالتالي عدد المجاهيل ٠

ونعرض فيما يلي مفهوم المحدد والمفاهيم المختلفة المرتبطة به ، وكيفية إستخدام المحددات في حل المشكلات التجارية والإقتصادية المختلفة٠

(٤-٢) المحددات :

يُعرف المحدد بأنه مجموعة من العناصر (أعداد أو رموز) مرتبة في شكل صفوف وأعمدة موضوعة بين خطين رأسيين |...| مع توافر شرط أساسي وهو أن يكون عدد الصفوف مساوياً لعدد الأعمدة ٠

ولكل محدد درجة أو رتبة ، ودرجة المحدد عبارة عن (عدد الصفوف أو عدد الأعمدة)، وحيث أن عدد الصفوف = عدد الأعمدة ، فإن درجة المحدد إما أن تكون (١) أو (٢) أو (٣) أو٠٠٠٠ إلخ

- فقد يكون المحدد من الدرجة الأولى إذا كان يتكون من صف واحد ومن عمود واحد ، فمثلاً المحددات :

|-٥| ، |س| ، |٣| ، .... إلخ ، تُعتبر محددات من الدرجة الأولى .

- ومن ناحية ثانية إذا وُجد أربعة عناصر وأمكن وضعها في الصورة :

$$\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix}$$

فإن هذا الشكل يُسمى محدد من الدرجة الثانية لأنه يتكون من صفيْن وعموديْن ، ويكون العنصر $أ_{١١}$ هو العنصر الذي يقع في تقاطع الصف الأول مع العمود الأول، والعنصر $أ_{١٢}$ هو العنصر الذي يقع في تقاطع الصف الثاني مع العمود الأول ، وهكذا ، وبصفة عامة فإن العنصر يكون مذيل على اليسار برقميْن الأول منهما يشير إلى رقم الصف الذي يقع فيه العنصر والثاني يشير إلى رقم العمود الذي يقع فيه العنصر .

ونسوق فيما يلي أمثلة لأشكال المحددات ثنائية الدرجة :

$$\begin{vmatrix} -٢ & س \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} ٢ & -٥ \\ ٣ & ص \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} ٢س & -٤ \\ -٥ & ٨ \end{vmatrix}$$

- ومن ناحية أخرى ، إذا وُجد تسعة عناصر وأمكن وضعها في الصورة :

$$\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

فإن هذا الشكل يُسمى محدد من الدرجة الثالثة لأنه يتكون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة ، وكأمثلة لأشكال المحددات من الدرجة الثالثة نسوق المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} أ & ٥ & ٣ \\ ٢ & -٤ & ٧ \\ -٣ & ٢ & -٢ \end{vmatrix} \quad ، \quad \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -٥ \\ -٢ & ٤ & ٧ \\ ٥ & ٦ & س \end{vmatrix}$$

وبصفة عامة يكون المحدد من الدرجة (ن) إذا كان يحتوي على (ن) صف ، (ن) عمود ، ويمكن وضعه في شكل محدد في الصورة العامة التالية :

$$\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} & \cdots & أ_{ن١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} & \cdots & أ_{ن٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} & \cdots & أ_{ن٣} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ أ_{١ن} & أ_{٢ن} & أ_{٣ن} & \cdots & أ_{نن} \end{vmatrix}$$

وفي هذه الحالة يكون المحدد من الرتبة $ن^{٢}$ ، ويكون العنصر $أ_{٦٣}$ على سبيل المثال هو العنصر الذي يقع عند تقاطع الصف الثالث مع العمود السادس ، وهكذا ٠

وخلاصة ما سبق :

نخلص مما تقدم ببعض الملاحظات الهامة التي يمكن إيجازها في النقاط التالية :

١. لابد أن يكون المحدد مربعاً ، بمعنى أن عدد الصفوف لابد أن يكون مساوياً لعدد الأعمدة ٠
٢. لكل محدد قيمة جبرية معينة ٠
٣. درجة المحدد هي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة التي يتكون منها المحدد ، أو هي عدد العناصر في الصف الواحد أو العمود الواحد ٠

القطر الرئيسي :

القطر الرئيسي هو القطر الذي يحتوي على العناصر $أ_{رم}$ (لكل ر=م)

فمثلاً إذا وُجد المحدد (أ) التالي من الدرجة الثانية :

$$\text{المحدد أ} = \begin{vmatrix} -٢ & س \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$$

فإن القطر الرئيسي لهذا المحدد هو القطر الذي يحتوي على العنصرين (-٢ ، ٣).

ومن ناحية أخرى إذا وجد المحدد (ب) التالي من الدرجة الثالثة :

$$\text{المحدد ب} = \begin{vmatrix} أ & ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٧ \\ -٣ & ٢ & ٩ \end{vmatrix}$$

فإن القطر الرئيسي لهذا المحدد هو القطر الذي يحتوي على العناصر (أ ، ٤ ، ٩). وهكذا .

القطر الثانوي :

القطر الثانوي هو القطر العمودي على القطر الرئيسي

- فمثلاً في المحدد (أ) ، حيث : $\text{المحدد أ} = \begin{vmatrix} -٢ & س \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$

فإن القطر الثانوي هو القطر الذي يحتوي على العنصرين ٥ ، س).

وفي المحدد (ب) حيث : $\text{المحدد ب} = \begin{vmatrix} أ & ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٧ \\ -٣ & ٢ & ٩ \end{vmatrix}$

فإن القطر الثانوي هو القطر الذي يحتوي على العناصر (٣ ، ٤ ، -٣). وهكذا .

المحيدد :

لكل عنصر في أي محدد مهما كانت رتبته محدد أصغر يُطلق عليه لفظ المحـيدد ، ومحـيدد العنصـر هو المحدد الأصلي بعد حذف الصف والعمود اللذان بهما هذا العنصر ٠

- فمثلاً إذا وُجد المحدد التالي من الدرجة الثانية :

$$\begin{vmatrix} س & -٢ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$$

فإن مُحيدد العنصر س = $\begin{vmatrix} س & -٢ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = |٦|$

- ومن ناحية أخرى إذا وجد المحدد التالي من الدرجة الثالثة :

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & أ \\ ٧ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٢ & -٣ \end{vmatrix}$$

فإن مُحيدد العنصر أ = $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & أ \\ ٧ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٢ & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٧ & -٤ \\ -٢ & ٢ \end{vmatrix}$

وهكذا أيا كانت درجة المحدد نلاحظ أن درجة المحيدد تكون أقل من درجة المحدد بوحدة واحدة ، فالمحدد من الدرجة الثانية ينبثق منه محـيددات مـن الدرجـة الأولى والمحدد من الدرجة الثالثة ينبثق منه محـيددات من الدرجة الثانية ، وهكذا ونجد أن عدد المحيددات المنبثقة من أي محدد يساوي عدد عناصر المحدد الأصلي٠

المرافق :

كما لكل عنصر في المحدد مرافق ، ومرافق العنصر هو محيدده مضـــروباً فـــي (-١) مرفوعة لقوة مقدارها حاصل جمع ترتيب العنصر في الصف والعمود ٠

فمثلاً إذا وُجد المحدد التالي من الدرجة الثانية:

$$\begin{vmatrix} س & -٢ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$$

فإن :

مرافق العنصر -٢ = $(-١)^{(١+١)} \times |٣| = + |٣|$

مرافق العنصر ٦ = $(-١)^{(١+٢)} \times |س| = - |س|$

مرافق العنصر ٣ = $(-١)^{(٢+٢)} \times |-٢| = + |-٢|$

مرافق العنصر س = $(-١)^{(٢+١)} \times |٦| = - |٦|$

وبصـــفة عامـــة ولـــتحديد إشارة مرافق أى عنصر من عناصر المحـــدد نقوم بجمع ترتيبى الصف و العمود الواقع فيهما هذا العنصر. فـــإذا كـــان المجمـــوع زوجياً كانت الإشارة موجبة وإذا كان المجموع فردياً كانت الإشارة سالبة.

ولتأكيد ذلك ، إذا وُجد المحدد التالي من الدرجة الثالثة :

$$\begin{vmatrix} جـ_١ & ب_١ & أ_١ \\ جـ_٢ & ب_٢ & أ_٢ \\ جـ_٣ & ب_٣ & أ_٣ \end{vmatrix}$$

وعلى ذلك فإن :

مرافق العنصر $\text{أ}_{١} = (-١)^{١+١} \times \begin{vmatrix} \text{جـ}_{٢} & \text{ب}_{٢} \\ \text{جـ}_{٣} & \text{ب}_{٣} \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} \text{جـ}_{٢} & \text{ب}_{٢} \\ \text{جـ}_{٣} & \text{ب}_{٣} \end{vmatrix}$

مرافق العنصر $\text{أ}_{٢} = (-١)^{٢+١} \times \begin{vmatrix} \text{جـ}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{جـ}_{٣} & \text{ب}_{٣} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{جـ}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{جـ}_{٣} & \text{ب}_{٣} \end{vmatrix}$

مرافق العنصر $\text{أ}_{٣} = (-١)^{٣+١} \times \begin{vmatrix} \text{جـ}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{جـ}_{٢} & \text{ب}_{٢} \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} \text{جـ}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{جـ}_{٢} & \text{ب}_{٢} \end{vmatrix}$

مرافق العنصر $\text{ب}_{٣} = (-١)^{٣+٢} \times \begin{vmatrix} \text{جـ}_{١} & \text{أ}_{٢} \\ \text{جـ}_{٢} & \text{أ}_{٣} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{جـ}_{١} & \text{أ}_{٢} \\ \text{جـ}_{٢} & \text{أ}_{٣} \end{vmatrix}$

وعلى ذلك تكون إشارات مرافقات العناصر في المحدد في الشكل :

$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}$ كمحدد من الدرجة الثانية ٠

وتكون في الشكل :

$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ إذا كان المحدد من الدرجة الثالثة ٠

وتكون في الشكل :

$\begin{vmatrix} - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \end{vmatrix}$ إذا كان المحدد من الدرجة الرابعة ٠ وهكذا ٠

وتستخدم فكرة المحيددات وبالتالي المرافقات في حساب القيمة الجـبرية للمحدد أياً كانت درجته ، وفيما يلي نتناول كيفية حساب قيمة المحددات ٠

(٤-٢-١) مفكوك المحددات :

لكل محدد أياً كانت درجته قيمة جبرية وحيدة ، وعادة ما يُرمز لقيمة المحدد بالرمز Δ وتوجد طريقتان رئيسيتان لحساب قيمة المحدد وهما :

١. طريقة كرمر Cramer ٠

٢. طريقة سارس Sarrus ٠

ونتناول فيما يلي كيفية حساب قيمة المحددات وفقا لكل من الطريقتين

الطريقة الأولى : طريقة كرمر Cramer ٠

تتلخص القاعدة العامة المستخدمة في أن قيمة أي محدد تعادل المجموع الجبري لحواصل ضرب عناصر أي صف أو أي عمود في مرافقاتها ، كل على حسب موقعه في المحدد الأصلي ، ونتناول فيما يلي كيفية حساب قيمة المحددات من الدرجة الثانية والثالثة باعتبار أن هذه النوعيات من المحددات هي الشائع استخدامها ٠

(٤-٢-١-١) قيمة المحدد من الدرجة الثانية :

إذا كان المحدد من الدرجة الثانية ، يتم حساب قيمته على أنها :

= حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي - حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي

وعلى ذلك فإن : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{vmatrix} = أ_١ب_٢ - أ_٢ب_١$

ويُطلق على الطرف الأيسر "مفكوك المحدد" وهذه القيمة يتم الحصول عليها بإيجاد الفرق بين حاصل ضرب قطرى المحدد أي $أ_١ب_٢$ ، $أ_٢ب_١$ ٠

مثال (١)

إحسب قيم المحددات الأتية:

$أ = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ ، $ب = \begin{vmatrix} ٢ & ٤- \\ ٣- & ٧ \end{vmatrix}$

$ج = \begin{vmatrix} ٢ & ٤- \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ ، $د = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣- & ٧ \end{vmatrix}$

الحــل :

أولاً : $أ = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$

Δ أ = (٢×٧) − (٣×٤) = ١٤ − ١٢ = ٢

ثانياً : $ب = \begin{vmatrix} ٢ & ٤- \\ ٣- & ٧ \end{vmatrix}$

Δ ب = (٢×٧) − (-٣×-٤) = ١٤ − ١٢ = ٢

ثالثاً : $ج = \begin{vmatrix} ٢ & ٤- \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$

Δ ج = (٢×٧) − (٣×-٤) = ١٤ + ١٢ = ٢٦

رابعاً : $د = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣- & ٧ \end{vmatrix}$

Δ د = (٢×٧) − (-٣×٤) = ١٤ + ١٢ = ٢٦

مثال (٢)

إحسب قيم المحددات الأتية:

(١)- $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ (٢)- $\begin{vmatrix} ٢- & ٤- \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ (٣)- $\begin{vmatrix} أ & -ب \\ جـ & أ^{٢} \end{vmatrix}$

الحــل :

(١)- $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = (٢\times٥) - (٣\times٤) = ١٠ - ١٢ = -٢$

(٢)- $\begin{vmatrix} -٢ & -٤ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = (-٢\times٥) - (٣\times-٤) = -١٠ + ١٢ = ٢$

(٣)- $\begin{vmatrix} \text{أ} & -\text{ب} \\ \text{جـ} & \text{أ}^{٢} \end{vmatrix} = (\text{أ}\times\text{أ}^{٢}) - (\text{جـ}\times-\text{ب}) = \text{أ}^{٣} + \text{ب جـ}$

(٤-٢-١-٢) قيمة المحدد من الدرجة الثالثة :

إذا وُجد محدد في الصورة :

$$\text{س} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١} & \text{ب}_{١} & \text{جـ}_{١} \\ \text{أ}_{٢} & \text{ب}_{٢} & \text{جـ}_{٢} \\ \text{أ}_{٣} & \text{ب}_{٣} & \text{جـ}_{٣} \end{vmatrix}$$

فإن هذا المحدد يُسمى "محدداً من الدرجة الثالثة" لأنه يتكون من تسع عناصر مرتبة فى ثلاث صفوف وثلاث أعمدة. ولإيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة نقوم بما يلي :

(١) نختار أحد الأعمدة (أو أحد الصفوف) من هذا المحدد.

(٢) نضرب العنصر الأول من هذا العمود (أو الصف) فى مرافقه والعنصر الثانى نضربه فى مرافقه. ثم العنصر الثالث نضربه فى مرافقه.

(٣) نجمع قيم حواصل الضرب السابقة والناتج هو قيمة المحدد وعلى ذلك فإن مفكوك المحدد المذكور فى الصورة السابقة بإستخدام عناصر العمود الأول يكون:

$$\because \text{س} = \begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{ب}_١ & \text{أ}_١ \\ \text{جـ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{أ}_٢ \\ \text{جـ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{أ}_٣ \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta\text{س} = \text{أ}_١(-١)^{١+١}\begin{vmatrix} \text{جـ}_٢ & \text{ب}_٢ \\ \text{جـ}_٣ & \text{ب}_٣ \end{vmatrix} + \text{أ}_٢(-١)^{١+٢}\begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{جـ}_٣ & \text{ب}_٣ \end{vmatrix}$$

$$+ \text{أ}_٣(-١)^{١+٣}\begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{جـ}_٢ & \text{ب}_٢ \end{vmatrix}$$

$$= \text{أ}_١\begin{vmatrix} \text{جـ}_٢ & \text{ب}_٢ \\ \text{جـ}_٣ & \text{ب}_٣ \end{vmatrix} - \text{أ}_٢\begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{جـ}_٣ & \text{ب}_٣ \end{vmatrix} + \text{أ}_٣\begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{جـ}_٢ & \text{ب}_٢ \end{vmatrix}$$

**** ومـــن ناحـــية أخرى وبإستخدام عناصر الصف الثانى يكون مفكوك المحدد كالأتى:**

$$\therefore \Delta\text{س} = \text{أ}_٢(-١)^{١+٢}\begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{جـ}_٣ & \text{ب}_٣ \end{vmatrix} + \text{ب}_٢(-١)^{٢+٢}\begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{أ}_١ \\ \text{جـ}_٣ & \text{ب}_٣ \end{vmatrix}$$

$$+ \text{جـ}_٢(-١)^{٣+٢}\begin{vmatrix} \text{ب}_١ & \text{أ}_١ \\ \text{ب}_٣ & \text{أ}_٣ \end{vmatrix}$$

$$= -\text{أ}_٢\begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{جـ}_٣ & \text{ب}_٣ \end{vmatrix} + \text{ب}_٢\begin{vmatrix} \text{جـ}_١ & \text{أ}_١ \\ \text{جـ}_٣ & \text{ب}_٣ \end{vmatrix} - \text{جـ}_٢\begin{vmatrix} \text{ب}_١ & \text{أ}_١ \\ \text{ب}_٣ & \text{أ}_٣ \end{vmatrix}$$

ونتـــناول فـــيما يلـــي أمثلة لتبيان كيفية إيجاد القيمة الجبرية للمحدد من الرتبة الثالثة ٠

مثـــال (٣)

إحسب قيم المحددات الآتية:

$$\text{أ} = \begin{vmatrix} ٧ & ٢ & ٧ \\ -٢ & -٥ & -٢ \\ ١ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} \qquad \text{ب} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -٢ & ٢ & \text{صفر} \\ \text{ب} & -١ & ١ \end{vmatrix}$$

الحـــل :

أولاً : $\text{أ} = \begin{vmatrix} ٧ & ٢ & ٧ \\ -٢ & -٥ & -٢ \\ ١ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$

$$\therefore \Delta\,\text{أ} = ٧ \begin{vmatrix} -٥ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} - (-٢) \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ -٥ & -٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٧\,(-٢٠ + ٦) + ٢\,(٨ - ٢١) + (-٤ + ٣٥)$$

$$= -٩٨ - ٢٦ + ٣١ = -٩٣$$

ثانياً : $\text{ب} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -٢ & ٢ & \text{صفر} \\ \text{ب} & -١ & ١ \end{vmatrix}$

$$\therefore \Delta\,\text{ب} = \begin{vmatrix} ٢ & \text{صفر} \\ -١ & ١ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ١ \end{vmatrix} + \text{ب} \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

$$= (٢ + \text{صفر}) - ٢\,(١ + ١) + \text{ب}\,(\text{صفر} - ٢)$$

$$= ٢ - ٢ - ٢\text{ب} = -٢\text{ب}$$

مثــال (٤)

إحسب قيم المحددات الأتية:

$$أ = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & -٤ \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ٥ & -٣ \end{vmatrix} \qquad ب = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & -٢ \\ ٤ & ٣ & ٨ \\ ٢ & -٤ & ٢١ \end{vmatrix}$$

الحــــل :

أولاً : $أ = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & -٤ \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ٣ & ٥ & -٣ \end{vmatrix}$

باستخدام عناصر العمود الأول :

$$\therefore \Delta أ = ٢ \begin{vmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{vmatrix} - (-١) \begin{vmatrix} -١ & -٤ \\ ٥ & -٣ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} -١ & -٤ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix}$$

= ٢ (صفر− ١٠) + ١ (٣ + ٢٠) +٣ (−٢+ صفر)

= −٢٠ + ٢٣ − ٦ = − ٣

ثانياً : $ب = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & -٢ \\ ٤ & ٣ & ٨ \\ ٢ & -٤ & ٢١ \end{vmatrix}$

باستخدام عناصر العمود الأول :

$$\therefore \Delta ب = +٣ \begin{vmatrix} ٣ & ٨ \\ -٤ & ٢١ \end{vmatrix} - ٤ \begin{vmatrix} -٢ & -٢ \\ -٤ & ٢١ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} -٢ & -٢ \\ ٣ & ٨ \end{vmatrix}$$

=٣ (٦٣ + ٣٢) − ٤ (−٤٢ − ٨) +٢ (−١٦ + ٦)

= +٢٨٥ + ٢٠٠ − ٢٠ = ٤٦٥

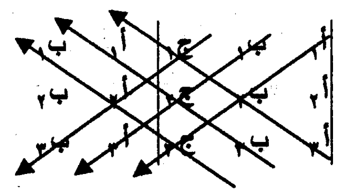
الطريقة الثانية : طريقة سارس Sarrus .

وتوجد طريقة أخرى لإيجاد قيمة المحددات من الدرجة الثالثة تُسمى بالطريقة القطرية إهتدى إليها (سارس) وهى لا تصلح إلا للمحددات التى من الدرجة الثالثة فقط ، ويمكن توضيح طريقة (سارس) لحساب قيمة المحدد من الدرجة الثالثة على النحو التالي :

نكتب عناصر الثلاثة أعمدة للمحدد

$$\begin{vmatrix} أ_{١} & ب_{١} & ج_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} & ج_{٢} \\ أ_{٣} & ب_{٣} & ج_{٣} \end{vmatrix}$$

ثم نعيد كتابة عناصر العمودين الأولين (أو الصفين الأولين)على الترتيب كما هو مبين بالشكل التالي :



وهنا نجد أن قيمة المحدد وفقاً لطريقة (سارس) تتمثل في مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسية مطروحاً منها مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار الثانوية ، أي أن قيمة المحدد تعادل حاصل ضرب العناصر الواقعة على الخطوط التى فى إتجاه الأسهم من أعلى إلى أسفل مطروحاً منها حاصل ضرب العناصر الواقعة على الخطوط التي في إتجاه الأسهم من أسفل إلى أعلى .

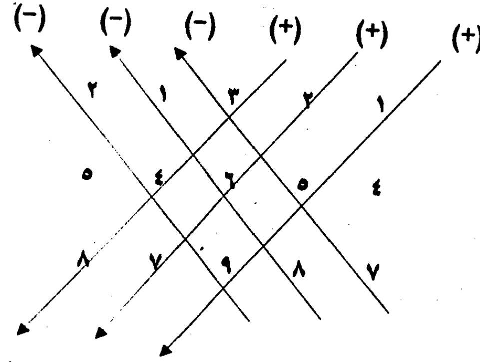
أى أن قيمة المحدد =

$$= أ_{١}ب_{٢}ج_{٣} + ب_{١}ج_{٢}أ_{٣} + ج_{١}أ_{٢}ب_{٣} - أ_{٣}ب_{٢}ج_{١} - ب_{٣}ج_{٢}أ_{١} - ج_{٣}أ_{٢}ب_{١}$$

مثـــال (٥)

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix}$ باستخدام طريقة سارس

الحـــل :



Δ = (١ × ٥ × ٩) + (٢ × ٦ × ٧) + (٣ × ٤ × ٨)

− (٣ × ٥ × ٧) − (١ × ٦ × ٨) − (٢ × ٤ × ٩)

= ٤٥ + ٨٤ + ٩٦ − ١٠٥ − ٤٨ − ٧٢

= ٢٢٥ − ٢٢٥ = صفر

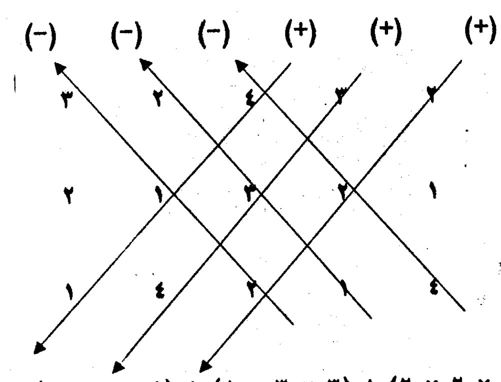
مثـــال (٦)

أوجد قيمة المحدد التالي باستخدام طريقة سارس :

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

الحـــل :

نعيد كتابة العمودين الأول والثاني ثم نطبق الطريقة على النحو السابق ، حيث :



Δ = (٢ × ٢ × ٢) + (٣ × ٣ × ٤) + (٤ × ١ × ١)

− (٤ × ٢ × ٤) − (١ × ٣ × ٢) − (٢ × ١ × ٣)

= ٨ + ٣٦ + ٤ − ٣٢ − ٦ − ٦ = ٤

(٤-٢-٣) محددات الدرجة الرابعة:

الصورة العامة لمحددات الدرجة الرابعة هى :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{جـ}_1 & \text{د}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{جـ}_2 & \text{د}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{جـ}_3 & \text{د}_3 \\ \text{أ}_4 & \text{ب}_4 & \text{جـ}_4 & \text{د}_4 \end{vmatrix}$$

وعلى ذلك فإن محدد الدرجة الرابعة يتكون من ستة عشر عنصراً مرتبة فى أربعة صفوف وأربعة أعمدة .

ولإيجاد مفكوك هذا المحدد يتم تطبيق القاعدة العامة بضرب عناصر أحد الأعمدة أو أحد الصفوف في مرافقاتها ، ونلاحظ أن مرافق كل عنصر من هذه العناصر الأربعة في العمود (أو الصف) عبارة عن محدد من الرتبة الثالثة .

وبإستخدام عناصر العمود الأول تكون قيمة المحدد =

$$\Delta = أ_١ \begin{vmatrix} ب_٢ & جـ_٢ & د_٢ \\ ب_٣ & جـ_٣ & د_٣ \\ ب_٤ & جـ_٤ & د_٤ \end{vmatrix} - أ_٢ \begin{vmatrix} ب_١ & جـ_١ & د_١ \\ ب_٣ & جـ_٣ & د_٣ \\ ب_٤ & جـ_٤ & د_٤ \end{vmatrix}$$

$$+ أ_٣ \begin{vmatrix} ب_١ & جـ_١ & د_١ \\ ب_٢ & جـ_٢ & د_٢ \\ ب_٤ & جـ_٤ & د_٤ \end{vmatrix} - أ_٤ \begin{vmatrix} ب_١ & جـ_١ & د_١ \\ ب_٢ & جـ_٢ & د_٢ \\ ب_٣ & جـ_٣ & د_٣ \end{vmatrix}$$

مثـــال (٧)

إحسب قيم المحدد التالي :

$$س = \begin{vmatrix} ٠ & ٣ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

الحــل :

Δ =

$$صفر \begin{vmatrix} ٠ & ٢ & ٠ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} - صفر \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

= صفر − ١ [٢(صفر−١)] + ٢[١(صفر−٤)] − صفر

= +٢−٨ = −٦

مثـــال (٨)

أوجد مفكوك المحدد الآتى بمعلومية عناصر الصف الثالث:

$$\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ & ٣ \\ ١ & \text{صفر} & ١ & -١ \\ ٢ & ٤ & ٥ & -١ \\ ١ & \text{صفر} & ٧ & ١ \end{vmatrix}$$

الحـــل :

$$\text{قيمة المحدد} = ٢\,(-١)^{٣+١}\begin{vmatrix} -١ & ١ & ٣ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٠ & ٧ & ١ \end{vmatrix} + ٤\,(-١)^{٣+٢}\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & ١ & -١ \\ ١ & ٧ & ١ \end{vmatrix}$$

$$+ ٥\,(-١)^{٣+٣}\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{vmatrix} + (-١)\,(-١)^{٣+٤}\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٧ \end{vmatrix}$$

أي أن :

$$\text{قيمة المحدد} = ٢\begin{vmatrix} -١ & ١ & ٣ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٠ & ٧ & ١ \end{vmatrix} - ٤\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & ١ & -١ \\ ١ & ٧ & ١ \end{vmatrix}$$

$$+ ٥\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٧ \end{vmatrix}$$

وباســتكمال الحل وإيجاد قيم المحددات من الدرجة الثالثة فإننا سوف نجد أن قيمة المحدد = -٢٢٨

(٤-٥) إستخدام المحددات فى حل المعادلات الخطية الآنية :

تستخدم المحددات في العديد من التطبيقات من الناحية العملية ، فتُستخدم المحددات في حل الأنظمة الخطية التي يمكن صياغتها في صورة مجموعة من المعادلات الخطية الآنية

يتمثل التطبيق المباشر لإستخدام المحددات في حل مجموعة المعادلات الخطية ،فلقد إكتشف *Cramer* فى القرن الثامن عشر أن نظرية المحددات يمكن إستخدامها فى حل المعادلات الخطية • ويُعتبر حل المعادلات من أهم التطبيقات العملية لنظرية المحددات •

ولتوضيح كيفية استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية ومدى بساطتها في الإحلال محل الطرق الأخرى المطولة مثل طريقة الحذف نسوق فيما يلي فلسفة طريقة المحددات وكيفية استخدامها في حل المعادلات الخطية الآنية بمختلف المجموعات ، فقد تكون مجموعة المعادلات في مجهولين أو ثلاث مجاهيل أو أربعة مجاهيل أو غير ذلك حتى مجموعة المعادلات في ن من المجاهيل •

(٤-٥-١) حل المعادلات الخطية في مجهولين :

وقبل دراسة استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية نسوق المثال التوضيحي التالي :

بفرض أن المطلوب هو إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين :

$$أ_١ س + ب_١ ص = ك_١ \quad (١)$$

$$أ_٢ س + ب_٢ ص = ك_٢ \quad (٢)$$

فإننا نقوم بحل هاتين المعادلتين مع بعضهما ونوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققانها فى آن واحد . ومن الطرق الشائعة المعروفة لحل هذه المعادلات هى طريقة الحذف.

وبمقتضى طريقة الحذف أننا نقوم بضرب المعادلة (١) × $ب_٢$ (أى فى معامل ص فى المعادلة (٢)) والمعادلة (٢) × $-ب_١$ وبإجراء ذلك نحصل على المعادلتيين التاليتين :

$$أ_١ب_٢س + ب_١ب_٢ص = ب_٢ك_١ \quad (٣)$$

$$-أ_٢ب_١س - ب_١ب_٢ص = -ب_١ك_٢ \quad (٤)$$

وبجمع المعادلتين (٣) ، (٤) نحصل على المعادلة :

$$أ_١ب_٢س - أ_٢ب_١س = ب_٢ك_١ - ب_١ك_٢ \quad (٥)$$

$$\therefore س\,(أ_١ب_٢ - أ_٢ب_١) = ب_٢ك_١ - ب_١ك_٢$$

$$\therefore س = \frac{ب_٢ك_١ - ب_١ك_٢}{أ_١ب_٢ - أ_٢ب_١} \quad (٦)$$

ومن ناحية أخرى إذا ضربنا المعادلة (١) × $-أ_٢$ والمعادلة (٢) × $أ_١$ ثم بجمعهما نحصل على المعادلة الآتية :

$$ص\,(أ_١ب_٢ - أ_٢ب_١) = أ_١ك_٢ - أ_٢ك_١ \quad (٧)$$

$$\therefore ص = \frac{أ_١ك_٢ - أ_٢ك_١}{أ_١ب_٢ - أ_٢ب_١} \quad (٨)$$

هذا بفرض أن المقام فى كلا المعادلتين (٦) ، (٨) لا يساوى صفراً وبالتعويض المباشر بقيمتى س ، ص التى حصلنا عليهما فى (٦) ، (٨) فى المعادلة الأصلية (١) ينتج أن :

$$أ_{١}س+ب_{١}ص = أ_{١}\frac{ب_{٢}ك_{١}-ب_{١}ك_{٢}}{أ_{١}ب_{٢}-أ_{٢}ب_{١}}+ب_{١}\frac{أ_{١}ك_{٢}-أ_{٢}ك_{١}}{أ_{١}ب_{٢}-أ_{٢}ب_{١}} \qquad (٩)$$

$$=\frac{أ_{١}ب_{٢}ك_{١}-أ_{١}ب_{١}ك_{٢}+أ_{١}ب_{١}ك_{٢}-أ_{٢}ب_{١}ك_{١}}{أ_{١}ب_{٢}-أ_{٢}ب_{١}}$$

$$=\frac{أ_{١}ب_{٢}ك_{١}-أ_{٢}ب_{١}ك_{١}}{أ_{١}ب_{٢}-أ_{٢}ب_{١}}=\frac{ك_{١}(أ_{١}ب_{٢}-أ_{٢}ب_{١})}{(أ_{١}ب_{٢}-أ_{٢}ب_{١})}=ك_{١}$$

وهكذا يكون الحال إذا تم التعويض بقيمتي س ، ص في المعادلة (٢) وعلى ذلك نجد أن قيمتى س ، ص التى حصلنا عليها بطريقة الحذف تحقق المعادلتين الأصليتين (١) ، (٢) .ومن الطبيعي أنه كلما زاد عدد المعادلات الخطية كلما زاد عدد المتغيرات المطلوب إيجاد قيمتها وبالتالي فإن إستخدام الطريقة سالفة الذكر سوف تكون أكثر تعقيداً .

$$\therefore س\ (أ_{١}ب_{٢}-أ_{٢}ب_{١})=ب_{٢}ك_{١}-ب_{١}ك_{٢}$$

وبالنظر إلى المقدار الجبرى $(أ_{١}ب_{٢}-أ_{٢}ب_{١})$ الوارد فى مقام كلاً من المعادلتين (٦) ، (٨) يمكن وضعه فى صورة محدد من الدرجة الثانية كما يلي:

$$\begin{vmatrix} أ_{١} & ب_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} \end{vmatrix} = أ_{١}ب_{٢}-أ_{٢}ب_{١}$$

ويطلق على الطرف الأيمن "محدد من الدرجة الثانية" لأنه يتكون من أربعة عناصر $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ مرتبة في صفين وعمودين .حيث أن الطرف الأيسر يمثل قيمة المحدد ، وهذه القيمة يتم الحصول عليها بإيجاد الفرق بين حاصل ضرب قطري المحدد كما سبق ٠

وعلــى ذلــك يمكــن وضع كلا من قيمتى س، ص التى حصلنا علــيها في المعادلتين (٦) ، (٨) فى صورة محددات من الدرجة الثانية كما يلي:

$$س = \frac{\begin{vmatrix} ك_1 & ب_1 \\ ك_2 & ب_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix}} \qquad ص = \frac{\begin{vmatrix} أ_1 & ك_1 \\ أ_2 & ك_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix}}$$

ومن الصورة السابقة نلاحظ الآتي :

١- أن مقامىْ س ، ص عبارة عن معاملات س ، ص فى الطرف الأيمن من المعادلتيْن المطلوب حلهما . فالعمود الأول فى المحدد هو عبارة عن معاملات س والعمود الثانى وهو عبارة عن معاملات ص ، ويُسمى هذا المحدد بمحدد المعاملات وسوف نرمز له بالرمز Δ "دلتا".

٢- بسط س عبارة عن محدد ناتج من إحلال ثوابت الطرف الأيسر فى المعادلتيْن محل معاملات س في محدد المعاملات ، ونرمز له بالرمز Δ س.

٣- بسط ص عبارة عن محدد ناتج من إحلال ثوابت الطرف الأيسر فــى المعادلتيْــن محل معاملات ص من محدد المعاملات وسوف نرمز له بالرمز Δ ص.

وفــيما يلــي نتناول بالتطبيق تبيان كيفية استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية في مجهوليْن ٠

مثـــال (٩)

بإستخدام المحددات أوجد قيمتيْ س ، ص فى المعادلتيْن التاليتيْن:

٢ س + ص = ٤

س + ٣ ص = ٧

الحـــل :

(١) محدد المعاملات Δ =

$$= \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = (٢×٣) - (١×١) = ٦ - ١ = ٥$$

(٢) محدد س= Δ س = $\begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix}$

$$= (٤×٣) - (٧×١) = ١٢ - ٧ = \boxed{٥}$$

(٣) محدد ص= Δ ص= $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix}$

$$= (٢×٧) - (١×٤) = ١٤ - ٤ = \boxed{١٠}$$

$$\therefore س = \frac{Δس}{Δ} = \frac{٥}{٥} = ١$$

$$\therefore ص = \frac{Δص}{Δ} = \frac{١٠}{٥} = ٢$$

ويمكـــن التحقق من صحة الحل بالتعويض بقيمتيْ س ، ص الناتجتيْن فى أي من المعادلتين فنجد أنه بالتعويض في المعادلة :

٢ س + ص = ٤

الطرف الأيمن = ٢ س + ص = ٢(١) + (٢)

= ٢ + ٢ = ٤

= الطرف الأيسر .

مثـــال (١٠)

بإستخدام المحددات أوجد قيمتيْ س ، ص فى المعادلتيْن التاليتيْن:

٦ س - ٣ ص = ٢١٠

- س + ٤ ص = ٤٢٠

الحـــل :

(١) محدد المعاملات Δ =

$$= \begin{vmatrix} ٦ & ٣- \\ ١- & ٤ \end{vmatrix} = (٦×٤) - (-١×-٣) = ٢٤ - ٣ = ٢١$$

(٢) محدد س= Δ س = $\begin{vmatrix} ٢١٠ & ٣- \\ ٤٢٠ & ٤ \end{vmatrix}$

$$= (٢١٠×٤) - (٤٢٠×-٣) = ٨٤٠ + ١٢٦٠ = \boxed{٢١٠٠}$$

(٣) محدد ص= Δ ص= $\begin{vmatrix} ٦ & ٢١٠ \\ ١- & ٤٢٠ \end{vmatrix}$

$$= (٦×٤٢٠) - (-١×٢١٠) = ٢٥٢٠ + ٢١٠ = \boxed{٢٧٣٠}$$

$$\therefore س = \frac{Δس}{Δ} = \frac{٢١٠٠}{٢١} = ١٠٠$$

$$\therefore ص = \frac{Δص}{Δ} = \frac{٢٧٣٠}{٢١} = ١٣٠$$

التحقق من الحل بالتعويض بقيمتيْ س، ص الناتجتيْن فى المعادلتين نجد أن :

- في المعادلة : ٦ س - ٣ ص = ٢١٠

(٦ × ١٠٠) - (٣×١٣٠) = ٦٠٠ - ٣٩٠ = ٢١٠

- في المعادلة : - س + ٤ ص = ٤٢٠

(-١×١٠٠) + (٤×١٣٠) = -١٠٠ + ٥٢٠ = ٤٢٠

(٤-٥-٢) حل المعادلات الخطية في ثلاثة مجاهيل :

بفرض وجود مجموعه من ثلاث معادلات خطية آنيه في ثلاث مجاهيل في الصورة التالية :

$$أ_1 س + ب_1 ص + جـ_1 ع = ك_1$$

$$أ_2 س + ب_2 ص + جـ_2 ع = ك_2$$

$$أ_3 س + ب_3 ص + جـ_3 ع = ك_3$$

فإنه يمكن إيجاد قيم المجاهيل س، ص، ع بطريقة الحذف السابق توضيحها عند حل معادلتين ، ولكن في حالة وجود ثلاث معادلات فإن الأمر يستوجب عمليات حسابية مطولة . ولكن يمكن استخدام طريقة المحددات في حل المعادلات الثلاث فى الثلاث مجاهيل س، ص، ع

ولحل المعادلات الثلاث الخطية بإستخدام المحددات نستخدم نفس الأسلوب المتبع فى حل المعادلتين الخطيتين فى مجهولين س، ص ، حيث يمكن إتباع الخطوات التالية :

(١) نوجد محدد المعاملات وذلك بأخذ معاملات س، ص، ع فى هذه المعادلات الثلاث ومن ثم نوجد قيمته . ونرمز لمحدد المعاملات بالرمز Δ ، حيث :

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 & جـ_1 \\ أ_2 & ب_2 & جـ_2 \\ أ_3 & ب_3 & جـ_3 \end{vmatrix} \quad (\text{بحيث } \Delta \neq \text{صفر})$$

(٢) نوجد قيمة محدد س (Δس) وذلك بإحلال الحدود المطلقة محل العمود الأول (أى معاملات س) فى محدد المعاملات ، حيث :

$$\Delta س = \begin{vmatrix} ك_1 & ب_1 & جـ_1 \\ ك_2 & ب_2 & جـ_2 \\ ك_3 & ب_3 & جـ_3 \end{vmatrix}$$

(٣) نوجـد محـدد ص (Δص) وذلـك بإحلال الحدود المطلقة محل العمود الثانى (أى معاملات ص) فى محدد المعاملات ، حيث :

$$\Delta ص = \begin{vmatrix} أ_1 & ك_1 & جـ_1 \\ أ_2 & ك_2 & جـ_2 \\ أ_3 & ك_3 & جـ_3 \end{vmatrix}$$

(٤) نوجد محدد ع (Δع) وذلك بإحلال الحدود المطلقة محل العمود الثالث (أى معاملات ع) فى محدد المعاملات ، حيث :

$$\Delta ع = \begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 & ك_1 \\ أ_2 & ب_2 & ك_2 \\ أ_3 & ب_3 & ك_3 \end{vmatrix}$$

(٥) لإيجـاد قيم المتغيرات س، ص، ع التى تحقق المعادلات الثلاث القواعد العامة التالية :

$$س = \frac{\Delta س}{\Delta}$$

$$ص = \frac{\Delta ص}{\Delta}$$

$$ع = \frac{\Delta ع}{\Delta}$$

وفـيما يلـي أمـثلة تطبيقـية لتبيان كيفية استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية الآنية في ثلاث مجاهيل.

مثــــال (١١)

المطلوب إستخدام المحددات فى حل مجموعة المعادلات الآتية:

$$2\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = 1$$

$$\text{س} + 3\text{ص} + \text{ع} = 10$$

$$8\text{س} - \text{ص} - 2\text{ع} = \text{صفر}$$

الحــــل

١) نوجد محدد المعاملات :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 8 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-6 + 1) - 1(-2 - 1) + 8(1 + 3)$$

$$= -10 + 3 + 32 = \boxed{25}$$

٢) نوجد محدد س ، حيث :

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 10 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \text{صفر}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-6 + 1) - 10(-2 - 1) + \text{صفر}(1 + 3)$$

$$= -5 + 30 + \text{صفر} = \boxed{25}$$

٣) نوجد محدد ص ، حيث :

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 8 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-20 - 0) - 1(-2 + 0) + 8(1 + 10)$$

$$= -40 + 2 + 88 = \boxed{50}$$

٤) نوجد محدد ع ، حيث :

$$\Delta ع = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ١ & ٣ & ١٠ \\ ٨ & -١ & ٠ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٣ & ١٠ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ -١ & ٠ \end{vmatrix} + ٨ \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ١٠ \end{vmatrix}$$

= ٢ (٠ + ١٠) -١ (٠+ ١) +٨ (١٠-٣)

= ٢٠ - ١ + ٥٦ = **٧٥**

$\therefore$ س = $\frac{\Delta س}{\Delta}$ = $\frac{٢٥}{٢٥}$ = ١

، ص = $\frac{\Delta ص}{\Delta}$ = $\frac{٥٠}{٢٥}$ = ٢

، ع = $\frac{\Delta ع}{\Delta}$ = $\frac{٧٥}{٢٥}$ = ٣

بالتعويض بقيم س، ص، ع فى المعادلات الثلاث نجد أن:

- في المعادلة الأولى :

٢س + ص - ع = ١

الطرف الأيمن = ٢(١) + ٢ - ٣ = ١ = الطرف الأيسر.

- في المعادلة الثانية :

س + ٣ص + ع = ١٠

الطرف الأيمن = ١ + ٣(٢) + ٣ = ١ + ٦ + ٣ = ١٠ = الأيسر.

- في المعادلة الثالثة :

٨س - ص -٢ع = صفر

الطرف الأيمن =٨(١) - (٢) - ٢(٣) = ٨ -٢ - ٦ = صفر = الأيسر

مثـــال (١٢)

إحسب بإستخدام المحددات قيم س، ص، ع فى المعادلات الآتية:

س + ص + ع − ٦ = ٠

٢س + ص − ٢ ع + ٢ = ٠

س + ص + ٦ = ٣ ع

الحـــل

١) لحـل مجموعـة المعـادلات السابقة كخطوة تمهيدية يتم ترتيب المعادلات على النحو التالي :

س + ص + ع = ٦

٢س + ص − ٢ ع = −٢

س + ص − ٣ ع = −٦

٢) نوجد محدد المعاملات :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-3+2) - 2(-3-1) + 1(-2-1)$$

$$= -1 + 8 - 3 = \boxed{4}$$

٣) نوجد محدد س ، حيث :

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -6 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 6(-3+2) + 2(-3-1) - 6(-2-1)$$

$$= -6 - 8 + 18 = \boxed{4}$$

٤) نوجد محدد ص ، حيث :

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(6-12) - 2(-18+6) + 1(-12+2)$$

$$= -6 + 24 - 10 = \boxed{8}$$

٥) نوجد محدد ع ، حيث :

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-6+2) - 2(-6-6) + 1(-2-6)$$

$$= -4 + 24 - 8 = \boxed{12}$$

$$\therefore \quad \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{،} \quad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{،} \quad \text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \frac{12}{4} = 3$$

بالتعويض بقيم س، ص، ع فى المعادلات الثلاث نجد أن:

•١• س + ص + ع = ٦

الطرف الأيمن = ١ + ٢ + ٣ = ٦ = الطرف الأيسر.

•٢• ٢س + ص – ٢ ع = –٢

الطرف الأيمن = ٢(١) + ٢ – ٢(٣) = ٢ + ٢ – ٦ = – ٢ = الأيسر.

•٣• س + ص – ٣ ع = –٦

الطرف الأيمن = ١ + ٢ – ٣(٣) = ١ + ٢ – ٩ = –٦ = الأيسر .

(٤–٥–٣) حل (ن) من المعادلات الخطية فى (ن) من المجاهيل:

إذا كانت س، ص، ع، .... أى مجاهيل عددها ن وأعطينا المعادلات التالية :

$$أ_{١} س + ب_{١} ص + جـ_{١} ع + ... + ل ى_{١} = ك_{١}$$

$$أ_{١} س + ب_{١} ص + جـ_{٢} ع + ... + ل ى_{٢} = ك_{٢}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$أ_{ن} س + ب_{ن} ص + جـ_{ن} ع + ... + ل ى_{ن} = ك_{ن}$$

يكون :

محدد المعاملات =

$$\left| \begin{array}{cccccc} أ_ن & ب_١ & جـ_١ & . & . & ل_١ \\ أ_ن & ب_٢ & جـ_٢ & . & . & ل_٢ \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ أ_ن & ب_ن & جـ_ن & . & . & ل_ن \end{array} \right| = \Delta$$

ويكون :

- $\Delta_{س}$ = المحدد الذى ينتج من Δ بوضع $ك_١$ ، $ك_٢$ ، ... ، $ك_ن$ مكان معاملات س فى المعادلات.
- $\Delta_{ص}$ = المحدد الذى ينتج من Δ بوضع $ك_١$ ، $ك_٢$ ، .. ، $ك_ن$ مكان معاملات ص فى المعادلات
- وهكذا.

فإنه يمكن إثبات أنه إذا كان Δ لا يساوى الصفر فإن :

$$س = \frac{\Delta س}{\Delta} \quad ، \quad ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} \quad ، \ldots\ldots ، \quad ى = \frac{\Delta ى}{\Delta}$$

تمارين محلولة

تمرين (١)

بإستخدام المحددات أوجد قيمتيْ س ، ص فى المعادلتيْن التاليتيْن:

٣ س + ص = ١٧

س - ٢ ص = -٦

الحــل :

(١) محدد المعاملات $\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix}$

$= (٣ \times -٢) - (١ \times ١) = -٦ - ١ = -٧$

(٢) محدد س: Δ س $= \begin{vmatrix} ١٧ & ١ \\ -٦ & -٢ \end{vmatrix} = (١٧ \times -٢) - (-٦ \times ١)$

$= -٣٤ + ٦ = -٢٨$

(٣) محدد ص: Δ ص $= \begin{vmatrix} ٣ & ١٧ \\ ١ & -٦ \end{vmatrix} = (٣ \times -٦) - (١ \times ١٧)$

$= -١٨ - ١٧ = -٣٥$

∴ س $= \frac{\Delta \text{س}}{\Delta} = \frac{-٢٨}{-٧} = ٤$

∴ ص $= \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta} = \frac{٣٥}{٧} = ٥$

ويمكــن الــتحقق مــن صــحةِ الحل بالتعويض بقيمتيْ س، ص الناتجتيْن فى المعادلتين نجد أن :

$٣ \times ٤ + ١ \times ٥ = ١٢ + ٥ = ١٧$

$١ \times ٤ - ٢ \times ٥ = ٤ - ١٠ = -٦$

تمرين (٢)

المطلوب حل المعادلتين التاليتين باستخدام المحددات :

٣ س + ٤ ص = ١٢

٤ س + ٥ ص = ٢٠

الحــل :

(١) محدد المعاملات Δ = $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$

= (٣×٥) – (٤×٤) = ١٥– ١٦ = –١

(٢)محدد س: Δ س = $\begin{vmatrix} ١٢ & ٤ \\ ٢٠ & ٥ \end{vmatrix}$ = (١٢×٥) – (٢٠×٤)

= ٦٠ – ٨٠ = **–٢٠**

(٣) محدد ص: Δ ص = $\begin{vmatrix} ٣ & ١٢ \\ ٤ & ٢٠ \end{vmatrix}$ = (٣×٢٠) – (٤×١٢)

= ٦٠ – ٤٨ = **١٢**

∴ س = $\frac{\Delta س}{\Delta}$ = $\frac{-٢٠}{-١}$ = ٢٠

∴ ص = $\frac{\Delta ص}{\Delta}$ = $\frac{١٢}{-١}$ = – ١٢

ويمكــن الـــتحقق مـــن صـــحة الحل بالتعويض بقيمتيّ س، ص الناتجتين في المعادلتين نجد أن :

٣ س + ٤ ص = ١٢

٤ س + ٥ ص = ٢٠

(٣ × ٢٠) + (٤× –١٢) = ٦٠ – ٤٨ = ١٢

(٤×٢٠) + (٥× –١٢) = ٨٠ – ٦٠ = ٢٠

تمرين (٣)

المطلوب حل المعادلتين التاليتين باستخدام المحددات :

٣ س - ٣ ص = ٤

س + ٤ ص = ٢

الحـــل :

(١) محدد المعاملات $\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & -٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$

= (٣×٤) - (١× -٣)

= ١٢+ ٣ = ١٥

(٢)محدد س: Δ س = $\begin{vmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$

= (٤×٤) - (٢× -٣)

= ١٦ + ٦ = ٢٢

(٣) محدد ص: Δ ص = $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$

= (٣×٢) - (١×٤)

= ٦ - ٤ = ٢

∴ س = $\frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{٢٢}{١٥}$

∴ ص = $\frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{٢}{١٥}$

تمرين (٤)

إحسب بإستخدام المحددات قيم س، ص، ع فى المعادلات الأتية:

٣ س - ٢ ص + ٣ ع = -٧

س + ٣ ص - ٢ ع = ١٧

٢ س + ص - ع = ١٢

الحـــل :

(١)محدد المعاملات:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ٣ \\ ١ & ٣ & -٢ \\ ٢ & ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ٣ \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٣(-٣ + ٢) - (٢ - ٣) + (٤ - ٩)$$

$$= -٣ + ١ - ١٠ = \boxed{-١٢}$$

(٢) محدد س:

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} -٧ & -٢ & ٣ \\ ١٧ & ٣ & -٢ \\ ١٢ & ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= -٧ \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} - ١٧ \begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} + ١٢ \begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix}$$

$$= -٧(-٣ + ٢) - ١٧(٢ - ٣) + ١٢(٤ - ٩)$$

$$= ٧ + ١٧ - ٦٠ = -٣٦$$

(٣) محدد ص = $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 1 & 17 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 3\begin{vmatrix} 17 & -2 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 17 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-17 + 24) - (7 - 36) + 2(14 - 51)$$

$$= 21 + 29 - 74 = -24$$

(٤) محدد ع = $\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 1 & 3 & 17 \\ 2 & 1 & 12 \end{vmatrix}$

$$= 3\begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 17 \end{vmatrix}$$

$$= 3(36 - 17) - (-24 + 7) + 2(-34 + 21)$$

$$= 57 + 17 - 26 = 48$$

$\therefore$ $\text{س} = \frac{-36}{-12} = 3$

، $\text{ص} = \frac{-24}{-12} = 2$

، $\text{ع} = \frac{48}{-12} = -4$

بالتعويض بقيم س، ص، ع فى المعادلات الثلاث نجد أن:

$3 \times 3 - 2 \times 2 + 3 \times (-4) = 9 - 4 - 12 = -7$

$1 \times 3 + 3 \times 2 - 2 \times (-4) = 3 + 6 + 8 = 17$

$2 \times 3 + 1 \times 2 - 1 \times (-4) = 6 + 2 + 4 = 12$

وعلـــى ذلـــك فإن قيم س، ص، ع التى حصلنا عليها تحقق المعادلات الثلاث.

تمرين (٥)

إحسب بإستخدام المحددات قيم س، ص، ع فى المعادلات الآتية:

$$3\,\text{س} - 2\,\text{ص} + 3\,\text{ع} = -7$$

$$\text{س} + 3\,\text{ص} - 2\,\text{ع} = 17$$

$$2\,\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = 12$$

الحـــل :

(١) محدد المعاملات:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3 + 2) - (2 - 3) + (4 - 9)$$

$$= -3 + 1 - 10 = -12$$

(٢) محدد س $= \Delta\,\text{س} = \begin{vmatrix} -7 & -2 & 3 \\ 17 & 3 & -2 \\ 12 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= -7\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 17\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -7(-3 + 2) - 17(2 - 3) + 12(4 - 9)$$

$$= 7 + 17 - 60 = -36$$

(٣) محدد ص $= \Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٣ & -٧ & ٣ \\ ١ & ١٧ & -٢ \\ ٢ & ١٢ & ١ \end{vmatrix}$

$= ٣ \begin{vmatrix} ١٧ & -٢ \\ ١٢ & -١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٧ & ٣ \\ ١٢ & -١ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} -٧ & ٣ \\ ١٧ & -٢ \end{vmatrix}$

$= ٣ (-١٧ + ٢٤) - (٧ - ٣٦) + ٢ (١٤ - ٥١)$

$= ٢١ + ٢٩ - ٧٤ = -٢٤$

(٤) محدد ع $= \Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & -٧ \\ ١ & ٣ & ١٧ \\ ٢ & ١ & ١٢ \end{vmatrix}$

$= ٣ \begin{vmatrix} ٣ & ١٧ \\ ١ & ١٢ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٢ & -٧ \\ ١ & ١٢ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} -٢ & -٧ \\ ٣ & ١٧ \end{vmatrix}$

$= ٣ (٣٦ - ١٧) - (-٢٤ + ٧) + ٢ (٣٤ + ٢١)$

$= ٥٧ + ١٧ - ٢٦ = ٤٨$

$\therefore$ س $= \frac{-٣٦}{-١٢} = ٣$

$\therefore$ ص $= \frac{-٢٤}{-١٢} = ٢$

$\therefore$ ع $= \frac{٤٨}{-١٢} = -٤$

تمارين

التمريـــن الأول : بإســـتخدام المحـــددات المطلوب حل مجموعات المعادلات الثنائية التالية:

(١) ٣ س + ص = ١٧

س – ٢ ص = – ٦

(٢) ٣ س + ص = – ٧

٢ س – ٣ ص = –١٢

(٣) س – ص = ١

س + ص = –٣

(٤) ٥ س – ٣ ص – ٣٢ = صفر

س + ٣ ص + ٨ = صفر

(٥) ٣ س – ٢ ص – ٨ = صفر

٥ ص – س + ٧ = صفر

التمرين الثاني : إستخدم المحددات في حساب قيم س، ص، ع في مجموعات المعادلات الثلاثية التالية :

(١) ٣ س – ٢ ص + ٣ ع = – ٧

س + ٣ ص – ٢ ع = ١٧

٢ س + ص – ع = ١٢

(٢) ع – س – ٢ ص = – ٢

س – ص – ع = صفر

٤ س – ٢ ص = ٣

(٣) ٣ س − ص − ٢ ع = ٧

٢ س + ص − ع = ١

٤ س + ٢ ص − ٣ ع = −١

(٤) ص + ٣ ع = ١

٣ س + ع = صفر

س + ٢ ص = ٣

(٥) ٢ س − ص − ع = ٦

٣ ص + س − ١ = صفر

٣ س − ص − ٥ ع = ١

(٦) س − ص + ٣ ع = ٦

− ٧ س + ٥ ص − ٧ ع = − ٢

− ٩ س + ٣ ص + ٢ ع = ٢٧

(٧) ٢ س + ص + ٢ ع = − ٩

٣ س − ٢ ص + ٥ ع = − ٢٦

س + ص + ع = ٣

(٨) ٤ س + ٣ صَ = ٦

س + ٥ ص + ع = − ٩

٢ س − ص + ٣ ع = ١٤

(٤-٢) المصفوفات :

(٤-٢-١) مقدمة

تلعب المصفوفات دوراً بارزاً في مجالات الحياة التجارية المختلفة حيث تساعد الكثيرين من رجال الأعمال في تخطيط أعمالهم في شتى المجالات واتخاذ القرار المناسب

ويمكن تعريف المصفوفة *Matrix* بأنها عبارة عن مجموعة من العناصر المرتبة فى صورة تنظيم مستطيل مكونةً عدداً من الصفوف والأعمدة ٠ويتم وضع عناصر المصفوفة بين قوسيْن حيث يكون القوسان إما في الصورة ( ) أو في الصورة [ ] ٠

فمثلاً نجد أن : $\begin{bmatrix} \text{٢} & \text{٩} & \text{صفر} \\ \text{س} & \text{٦} & \text{-٥} \end{bmatrix}$

تُسمى مصفوفة مكونة من صفين وثلاثة أعمدة ، حيث تتكون الصفوف والأعمدة من مجموعة من العناصر ، مع ملاحظة أن عناصر المصفوفة قد تكون أعداد أو رموز٠

وبصفة عامة ، فإن المصفوفة هي أداة رياضية تستخدم لعرض البيانات بطريقة منظمة ومبسطة تمهيداً لإجراء العديد من العمليات الرياضية في شتى المجالات ، وتأخذ المصفوفة الشكل العام التالي :

$$\text{أ}^{*} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١٣} & \cdots & \text{أ}_{١ن} \\ \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٢٣} & \cdots & \text{أ}_{٢ن} \\ \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٣٣} & \cdots & \text{أ}_{٣ن} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{أ}_{م١} & \text{أ}_{م٢} & \text{أ}_{م٣} & \cdots & \text{أ}_{من} \end{pmatrix}$$

حيث :

- نرمز للمصفوفة بحرف من الحروف العربية فوقه نجمة ، في حين نرمز لعناصر المصفوفة بحرف له دليل سفلي مزدوج الأول يشير إلى الصف والثاني يشير إلى العمود الواقع فيه هذا العنصر. فمثلاً الرمز $أ_{٢٣}$ يشير إلى العنصر الواقع في الصف الثاني والعمود الثالث.
- تشير (م) إلى عدد الصفوف ، وتشير (ن) إلى عدد الأعمدة ، ويقال للمصفوفة أنها مربعة إذا كان عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة أما إذا كان الأمر غير ذلك فيقال أن المصفوفة مستطيلة .

ولكل مصفوفة مربعة محدد يُسمى محدد المصفوفة وهو عبارة عن جميع عناصر تلك المصفوفة وبنفس الوضع والترتيب ولكنها موضوعة بين خطين رأسيين .

(٤-٢-٢) درجة المصفوفة :

تتحدد درجة المصفوفة على أساس عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) ، فتكون المصفوفة من الدرجة (م×ن) إذا إحتوت على (م) صف ، (ن) عمود .

فمثلاً :

$$\overset{*}{س} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ١ & -٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

يُقال أنها مصفوفة مستطيلة من الدرجة ٢×٣ لأنها تتكون من ٢ صف، ٣ عمود ، ويُشار إلى هذه المصفوفة بـ $\overset{*}{س}_{(٢×٣)}$

وكذلك :

$$\overset{*}{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٩ \\ ١ & ٦ \end{pmatrix}$$

يُقال أنها مصفوفة مستطيلة من الدرجة ٣×٢ لأنها تتكون من ٣ صف، ٢ عمود ، ويُشار إلى هذه المصفوفة بـ $\overset{*}{ب}_{(٣×٢)}$

وكذلك :

$$\overset{*}{ص} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٧ & ٨ & ٩ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$$

يُقال أنها مصفوفة مربعة من الدرجة ٣×٣ لأنها تتكون من ٣ صف، ٣ عمود ، ويُشار إلى هذه المصفوفة بـ $\overset{*}{ب}_{(٣×٣)}$

(٤-٢-٣) أهم أنواع المصفوفات :

على أساس عدد كل من الصفوف والأعمدة في المصفوفة الواحدة يوجد العديد من أنواع المصفوفات التي نذكر أهمها على النحو التالي •

(٤-٢-٣-١) المصفوفة المربعة :

إذا كان عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة (أي أن : م = ن) فإن المصفوفة تسمى "مصفوفة مربعة" ، فمثلاً بالنسبة للمصفوفات التالية :

$$\overset{*}{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٧ & ٢ \end{pmatrix} \quad \overset{*}{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٦ & ٢ \\ ٩ & ٤ & ٣ \\ ٣ & ٨ & ٥ \end{pmatrix} \quad \overset{*}{\text{جـ}} = \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ & ١- \\ ٩ & ٨ & ٧ & ٦ \\ ٣ & ٤ & ٥ & ٤- \\ ٩- & ٦- & ٢ & \text{صفر} \end{pmatrix}$$

نجد أنها تُعتبر مصفوفات مربعة لأن عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة في كل منها ، فالمصفوفة أ تتكون من صفين وعمودين وهي بذلك تكون من الدرجة ٢×٢ ويرمز لها بالرمز $\overset{*}{\text{أ}}_{٢\times٢}$ ، والمصفوفة ب تتكون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة وهى بذلك تكون من الدرجة ٣ × ٣، هذا ويرمز لها بالرمز $\overset{*}{\text{ب}}_{٣\times٣}$ ، والمصفوفة جـ تتكون من أربعة صفوف وأربعة أعمدة وهى بذلك تكون من الدرجة ٤ × ٤ ويرمز لها بالرمز $\overset{*}{\text{جـ}}_{٤\times٤}$ ، وهكذا يكون الحال بالنسبة لأي مصفوفة يكون فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة ،

ومن ناحية أخرى نجد أنه قد تحتوى المصفوفة على عنصر واحد مثل المصفوفة $\overset{*}{\text{أ}} = [-٣]$.

وفى هذه الحالة تكون المصفوفة أ من الدرجة ١ × ١.

(٤-٢-٣-٢) <u>المصفوفة الصفرية</u> : -

إذا كانت عناصر المصفوفة عبارة عن أصفار فإننا نسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة الصفرية فعلى سبيل المثال بالنسبة للمصفوفات التالية :

$$\overset{*}{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix} \quad \overset{*}{\text{ب}} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{جـ} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

نجد أنها تمثل مصفوفات صفرية جميع عناصرها أصفار ، حيث نجد أن المصفوفة أ من الدرجة ٢×٣ ، والمصفوفة ب من الدرجة ٣×٣، والمصفوفة جـ من الدرجة ٣ × ٢ ، ونجد أن المصفوفة الصفرية تقوم مقام الصفر العادي في العمليات الحسابية للمصفوفات ٠

(٤-٢-٣-٣) مصفوفة الوحدة :-

هي مصفوفة مربعة بحيث أن عناصر قطرها الرئيسي الذي يتجه من أعلى اليمين إلى أدنى اليسار هو الواحد أما بقية العناصر الباقية هي الصفر ، ويُرمز لهذه المصفوفة بالرمز $\overset{*}{I}$ ، فعلى سبيل المثال بالنسبة للمصفوفات التالية :

$$\overset{*}{I}_{٢} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix} \qquad \overset{*}{I}_{٣} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$$

$$\overset{*}{I}_{٤} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ١ & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & ١ & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$$

نجد أن كل منها يمثل مصفوفة الوحدة من الدرجة الثانية والثالثة والرابعة على التوالي ٠ وتقوم هذه المصفوفات في عملية ضرب المصفوفات مقام الواحد الصحيح في الضرب العادي٠

(٤-٢-٤) معكوس المصفوفة:-

معكوس المصفوفة (مبدل المصفوفة) هي المصفوفة الناتجة من استبدال صفوف مصفوفة ما بأعمدتها وأعمدتها بصفوفها ، وإذا كانت المصفوفة الأصلية هي $\overset{*}{ب}$ فإن معكوسها أو المصفوفة المبدلة لها يُرمز لها بالرمز $\overline{\overset{*}{ب}}$ ، ومن ناحية أخرى إذا كانت المصفوفة الأصلية $\overset{*}{ب}$ من الدرجة (م×ن) فإن معكوسها أو المصفوفة المبدلة لها $\overline{\overset{*}{ب}}$ تكون من الدرجة (ن×م) •

فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا المصفوفة :

$$\overset{*}{س} = \begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ٩ \\ ٥ & ٨ & ٢ \end{pmatrix} \text{ ، فإن معكوس المصفوفة } = \overline{\overset{*}{س}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٦ & ٨ \\ ٩ & ٢ \end{pmatrix}$$

ومن خصائص معكوس المصفوفة :

(١) إذا كان $\overset{*}{أ} + \overset{*}{ب} = \overset{*}{جـ}$ ، فإن : $\overline{\overset{*}{أ}} + \overline{\overset{*}{ب}} = \overline{\overset{*}{جـ}}$

أى أن محور مجموع مصفوفتين يساوى المجموع الجبري لمحور المصفوفة الأولى ومحور المصفوفة الثانية.

(٢) ك $\overline{\overset{*}{ب}} = \overline{(ك \times \overset{*}{ب})}$ حيث ك معامل عددى •

أى أن حاصل ضرب مقدار ثابت فى محور المصفوفة يساوي محور المصفوفة الناتجة عن ضرب المقدار الثابت فى المصفوفة.

(٣) $(\overset{*}{جـ}/)/ = \overset{*}{جـ}$ أى أن محور محور أى مصفوفة يساوى المصفوفة الأصلية •

مثال (١)

إذا كانت :

أ* = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب* = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٨ & ٧ \end{bmatrix}$ ، أ* + ب* = جـ* ، ك = ٥

المطلوب توضيح أن :

١- $\overline{\text{أ*}}$ + $\overline{\text{ب*}}$ = $\overline{\text{جـ*}}$

٢- ك $\overline{\text{ب*}}$ = $\overline{(\text{ك} \times \text{ب*})}$

٣- (جـ*/)/ = جـ*

الحل :

∵ جـ* = أ* + ب*

∴ جـ* = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٨ & ٧ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ١٤ & ١٢ \end{bmatrix}$

وعلى ذلك ، فإن :

$\overline{\text{أ*}}$ = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\overline{\text{ب*}}$ = $\begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$ $\overline{\text{جـ*}}$ = $\begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ ١٤ & ٤ \end{bmatrix}$

(١) $\overline{\text{أ*}}$ + $\overline{\text{ب*}}$ = $\overline{\text{جـ*}}$

الطرف الأيمن = $\overline{\text{أ*}}$ + $\overline{\text{ب*}}$ = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ ١٤ & ٤ \end{bmatrix}$ (١)

الطرف الأيسر = $\overset{*}{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ ١٤ & ٤ \end{bmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) يتضح أن : $\overset{*}{\text{أ}} + \overset{*}{\text{ب}} = \overset{*}{\text{جـ}}$

(٢) $\text{ك}\,\overset{*}{\text{ب}} = (\text{ك} \times \overset{*}{\text{ب}})^{/}$

حيث :

الطرف الأيمن = $\text{ك} \times \overset{*}{\text{ب}} = ٥ \times \begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣٥ & ١٥ \\ ٤٠ & ١٠ \end{bmatrix}$ (١)

وحيث أن :

$\text{ك} \times \overset{*}{\text{ب}} = ٥ \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٨ & ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٥ \\ ٤٠ & ٣٥ \end{bmatrix}$

∴ الطرف الأيسر = $(\text{ك} \times \overset{*}{\text{ب}})^{/} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٥ \\ ٤٠ & ٣٥ \end{bmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) يتضح أن : $\text{ك}\,\overset{*}{\text{ب}} = (\text{ك} \times \overset{*}{\text{ب}})^{/}$

(٣) $(\overset{*}{\text{جـ}}{}^{/})^{/} = \overset{*}{\text{جـ}}$

الطرف الأيمن = $(\overset{*}{\text{جـ}}{}^{/})^{/} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ ١٤ & ٤ \end{bmatrix}^{/} = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ١٤ & ١٢ \end{bmatrix}$ (١)

∴ الطرف الأيسر = $\overset{*}{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ٤ & ٤ \\ ١٤ & ١٢ \end{bmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) يتضح أن : $(\overset{*}{\text{جـ}}{}^{/})^{/} = \overset{*}{\text{جـ}}$

(٤-٢-٥) أهم العمليات الرياضية للمصفوفات :-

يمكن إجراء عمليات الجبر العادية على المصفوفات ، فيمكن جمع أو طرح مصفوفتين أو ضرب مصفوفة في مقدار ثابت ، كما يمكن ضرب مصفوفتين في بعضهما ، وذلك إذا توافرت الشروط لإجراء مثل تلك العمليات الحسابية السابقة ، وفيما يلي نتناول بالدراسة أهم العمليات الحسابية الأساسية لعلم المصفوفات .

(٤-٢-٥-١) جمع وطرح المصفوفات:

يمكن جمع أو طرح المصفوفتين أ ، ب إذا كان لهما نفس الدرجة ويتم ذلك بواسطة جمع أو طرح العناصر المتناظرة فى المصفوفات ، وعلى ذلك :

إذا كان لدينا المصفوفة $\text{أ} = \text{أ}_{\text{ر}\times\text{ل}}$ ، والمصفوفة $\text{ب} = \text{ب}_{\text{م}\times\text{ن}}$ ، لإنه لإجراء جمع أو طرح المصفوفتين فلا بد من تحقق الشرط :

$$\text{ر} = \text{م} \quad ، \quad \text{ل} = \text{ن}$$

ويكون :

$$\text{أ} + \text{ب} = (\text{أ}_{\text{ر}\times\text{ل}} + \text{ب}_{\text{م}\times\text{ن}})$$

$$\text{أ} - \text{ب} = (\text{أ}_{\text{ر}\times\text{ل}} - \text{ب}_{\text{م}\times\text{ن}})$$

مثال (٢)

إذا كانت $\overset{*}{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٢ & \text{صفر} \end{pmatrix}$ ، $\overset{*}{\text{ب}} = \begin{pmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$

المطلوب إيجاد :

١. $\overset{*}{\text{أ}} + \overset{*}{\text{ب}}$

٢. $\overset{*}{\text{ب}} + \overset{*}{\text{أ}}$

٣. $\overset{*}{\text{أ}} - \overset{*}{\text{ب}}$

٤. $\overset{*}{\text{ب}} - \overset{*}{\text{أ}}$

الحـــل :

(١) $\overset{*}{\text{أ}} + \overset{*}{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٢ & \text{صفر} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ & ٥ \\ ٦ & ٦ & ٥ \\ ٦ & \text{صفر} & ١ \end{pmatrix}$

(٢) $\overset{*}{\text{ب}} + \overset{*}{\text{أ}} = \begin{pmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٢ & \text{صفر} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ & ٥ \\ ٦ & ٦ & ٥ \\ ٦ & \text{صفر} & ١ \end{pmatrix}$

(٣) $\overset{*}{\text{أ}} - \overset{*}{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٢ & \text{صفر} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -١ & -٣ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ -٤ & ٤ & -١ \end{pmatrix}$

(٤) $\overset{*}{\text{ب}} - \overset{*}{\text{أ}} = \begin{pmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٢ & \text{صفر} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٤ & ١ & ٣ \\ -٢ & -٤ & -١ \\ ٤ & -٤ & ١ \end{pmatrix}$

ومن هنا يتضح أن :

(١) $\overset{*}{\text{أ}} + \overset{*}{\text{ب}} = \overset{*}{\text{ب}} + \overset{*}{\text{أ}}$

(٢) $\overset{*}{\text{أ}} - \overset{*}{\text{ب}} \neq \overset{*}{\text{ب}} - \overset{*}{\text{أ}}$

مثال (٣)

إذا كانت $\overset{*}{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\overset{*}{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\overset{*}{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix}$

المطلوب إيجاد :

١- $\overset{*}{\text{أ}} + \overset{*}{\text{ب}} + \overset{*}{\text{جـ}}$

٢- $\left(\overset{*}{\text{أ}} + \overset{*}{\text{ب}}\right) + \overset{*}{\text{جـ}}$

٣- $\overset{*}{\text{أ}} + \left(\overset{*}{\text{ب}} + \overset{*}{\text{جـ}}\right)$

٤- $\overset{*}{\text{أ}} + \overset{*}{\text{ب}} - \overset{*}{\text{جـ}}$

الحـــل :

(١) $\overset{*}{\text{أ}} + \overset{*}{\text{ب}} + \overset{*}{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٨ & -٦ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٧ & ٢ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$

(٢) $\left(\overset{*}{\text{أ}} + \overset{*}{\text{ب}}\right) + \overset{*}{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ١٤ & -٣ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٧ & ٢ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$

(٣) $\overset{*}{\text{أ}} + \left(\overset{*}{\text{ب}} + \overset{*}{\text{جـ}}\right) = \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١١ & -١ \\ -٦ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٧ & ٢ \\ -٢ & ٨ \end{bmatrix}$

(٤) $\overset{*}{\text{أ}} + \overset{*}{\text{ب}} - \overset{*}{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} ١٤ & -٣ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ & -٨ \\ ٦ & ٤ \end{bmatrix}$

خصائص جمع المصفوفات :

☐ مجموع مصفوفتين أ = ($أ_{رد}$) ، ب = ($ب_{رد}$) وكليهما من الدرجة م × ن عبارة عن مصفوفة جـ = ($جـ_{رد}$) من نفس الدرجة وعناصرها عبارة عن مجموع العناصر المتناظرة فى المصفوفتين المجموعتين .

☐ جمع المصفوفات تبادلي ، بمعنى أن :

أ + ب = ب + أ

☐ جمع المصفوفات ترتيبي ، بمعنى أنه إذا كان لدينا ثلاث مصفوفات أ =($أ_{رد}$)،ب =($ب_{رد}$)، جـ = ($جـ_{رد}$) ، وكلها مصفوفات من الدرجة (م×ن) فإن :

أ + ب + جـ = (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)

(٤-٢-٥-٢) ضرب المصفوفات :

من العمليات الحسابية التي يمكن إجراؤها على المصفوفات هي عملية الضرب ، ويمكن إجراء نوعين من عمليات الضرب في المصفوفات وهما :

١. ضرب المصفوفة فى مقدار ثابت

٢. ضرب المصفوفة في مصفوفة أخرى

الحالة الأولى : ضرب مقدار ثابت في مصفوفة :

يمكن ضرب المصفوفة في مقدار ثابت عن طريق ضرب هذا الثابت في جميع عناصر المصفوفة ، ويتضح ذلك من المثال التالي :

مثال (٤)

إذا كانت $\overset{*}{أ} = \begin{pmatrix} ٧ & \text{صفر} & ٥ \\ ٤ & -٢ & \text{صفر} \end{pmatrix}$ ، ك = ٢

المطلوب إيجاد : ك $\overset{*}{أ}$؟

الحـــل :

$$ك\ \overset{*}{أ} = ٢ \begin{pmatrix} ٧ & \text{صفر} & ٥ \\ ٤ & -٢ & \text{صفر} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٤ & \text{صفر} & ١٠ \\ ٨ & -٤ & \text{صفر} \end{pmatrix}$$

مثال (٥)

إذا كانت $\overset{*}{أ} = \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\overset{*}{ب} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -١ & \text{صفر} \end{pmatrix}$

المطلوب إيجاد : ٣ $\overset{*}{أ}$ + ٤ $\overset{*}{ب}$

الحـــل :

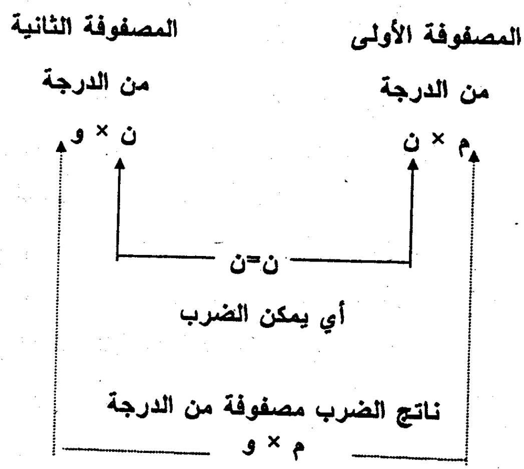
$$٣\ \overset{*}{أ} + ٤\ \overset{*}{ب} = ٣ \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} + ٤ \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ -١ & \text{صفر} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -٦ & ٦ \\ ٣ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١٢ & ٨ \\ -٤ & \text{صفر} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -١٨ & ١٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$$

الحالة الثانية : ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى :

لضرب مصفوفتين فلابد من توافر شرط رئيسي وهو أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى (في ترتيب الضرب) مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية (في ترتيب الضرب) ، أي أن :



ولإجراء عملية الضرب نقوم بضرب عناصر كل صف فى المصفوفة الأولى فى عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية . ونلاحظ أن ذلك يتم لو أن كل صف من المصفوفة الأولى يحتوى على نفس العدد من العناصر الموجودة فى أعمدة المصفوفة الثانية.

وتكون المصفوفة الناتجة من عملية الضرب لها عدد صفوف يساوي عدد صفوف الأولى (في ترتيب الضرب) ولها عدد أعمدة يساوي عدد أعمدة الثانية (في ترتيب الضرب) ٠

فإذا كان لدينا المصفوفتين أ ، ب ، حيث :

$$\overset{*}{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} \end{bmatrix} \quad , \quad \overset{*}{\text{ب}} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{21} & \text{ب}_{31} \\ \text{ب}_{12} & \text{ب}_{22} & \text{ب}_{32} \end{bmatrix}$$

وكانت المصفوفة أ هي المصفوفة الأولى والمصفوفة ب هي المصفوفة الثانية ، فإن المصفوفة جـ التى تعتبر حاصل ضرب المصفوفتين أ ، ب ، تكون من الدرجة (٣×٣) وهي :

عدد أعمدة المصفوفة الأولى أ × عدد صفوف المصفوفة الثانية ب

وبالتطبيق على المصفوفتين أ ، ب السابقتين يتم الحصول على كل عنصر في المصفوفة جـ على النحو التالي :

☒ ضرب عناصر الصف الأول للمصفوفة أ في العناصر المناظرة للعمود الأول للمصفوفة ب ليكون ناتج الجمع هو العنصر الأول في الصف الأول للمصفوفة جـ ، أي أن :

$$\text{جـ}_{11} = \text{أ}_{11}\,\text{ب}_{11} + \text{أ}_{21}\,\text{ب}_{12}$$

☒ ضرب عناصر الصف الأول للمصفوفة أ في العناصر المناظرة للعمود الثاني للمصفوفة ب ليكون ناتج الجمع هو العنصر الثاني في الصف الأول للمصفوفة جـ ، أي أن :

$$\text{جـ}_{21} = \text{أ}_{11}\,\text{ب}_{21} + \text{أ}_{21}\,\text{ب}_{22}$$

☒ ضرب عناصر الصف الأول للمصفوفة أ في العناصر المناظرة للعمود الثالث للمصفوفة ب ليكون ناتج الجمع هو العنصر الثالث في الصف الأول للمصفوفة جـ ، أي أن :

$$\text{جـ}_{31} = \text{أ}_{11}\,\text{ب}_{31} + \text{أ}_{21}\,\text{ب}_{32}$$

وهكـذا يمكـن تكويـن عناصـر الصـف الثانـي والثالث للمصفوفة جـ ،
وتكون المصفوفة جـ مرتبة على النحو التالي :

$$\overset{*}{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} \text{جـ}_{١١} & \text{جـ}_{٢١} & \text{جـ}_{٣١} \\ \text{جـ}_{١٢} & \text{جـ}_{٢٢} & \text{جـ}_{٣٢} \\ \text{جـ}_{١٣} & \text{جـ}_{٢٣} & \text{جـ}_{٣٣} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\text{أ}_{١١}\text{ب}_{١١}+\text{أ}_{٢١}\text{ب}_{١٢}) & (\text{أ}_{١١}\text{ب}_{٢١}+\text{أ}_{٢١}\text{ب}_{٢٢}) & (\text{أ}_{١١}\text{ب}_{٣١}+\text{أ}_{٢١}\text{ب}_{٣٢}) \\ (\text{أ}_{١٢}\text{ب}_{١١}+\text{أ}_{٢٢}\text{ب}_{١٢}) & (\text{أ}_{١٢}\text{ب}_{٢١}+\text{أ}_{٢٢}\text{ب}_{٢٢}) & (\text{أ}_{١٢}\text{ب}_{٣١}+\text{أ}_{٢٢}\text{ب}_{٣٢}) \\ (\text{أ}_{١٣}\text{ب}_{١١}+\text{أ}_{٢٣}\text{ب}_{١٢}) & (\text{أ}_{١٣}\text{ب}_{٢١}+\text{أ}_{٢٣}\text{ب}_{٢٢}) & (\text{أ}_{١٣}\text{ب}_{٣١}+\text{أ}_{٢٣}\text{ب}_{٣٢}) \end{bmatrix}$$

مثال (٦)

إذا كان لديك المصفوفات التالية :

$$\overset{*}{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{pmatrix} \quad ، \quad \overset{*}{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٢ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$$

المطلوب إيجاد :

١. إيجاد $\overset{*}{\text{أ}} \times \overset{*}{\text{ب}}$

٢. إيجاد $\overset{*}{\text{ب}} \times \overset{*}{\text{أ}}$

٣. هل $\overset{*}{\text{أ}} \times \overset{*}{\text{ب}} = \overset{*}{\text{ب}} \times \overset{*}{\text{أ}}$

الحـل :

$$١- \overset{*}{\text{أ}} \times \overset{*}{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٢ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$$

سنجد أن مصفوفة حاصل الضرب لها رتبة على النحو التالى :

$أ_{٢×٣} \times ب_{٣×٢} = جـ_{٢×٢}$

$$= \begin{pmatrix} [(١-×٤)+(٢×٢)+(٣×١)] & [(١-×١-)+(٢×٣)+(٣×٢)] \\ [(١×٤)+(٢×٢)+(٤×١)] & [(١×١-)+(٢×٣)+(٤×٢)] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (٤-٤+٣) & (١+٦+٦) \\ (٤+٤+٤) & (١-٦+٨) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٣ & ١٣ \\ ١٢ & ١٣ \end{pmatrix}$$

٢- $\overset{*}{ب} \times \overset{*}{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٢ \\ ١ & ١- \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١- & ٣ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$

سنجد أن مصفوفة حاصل الضرب هنا لها رتبة على النحو التالى :

$ب_{٣×٢} \times أ_{٢×٣} = جـ_{٣×٣}$

$$= \begin{pmatrix} [(٤×٤)+(١-×٣)] & [(٢×٤)+(٣×٣)] & [(١×٤)+(٢×٣)] \\ [(٤×٢)+(١-×٢)] & [(٢×٢)+(٣×٢)] & [(١×٢)+(٢×٢)] \\ [(٤×١)+(١-×١-)] & [(٢×١)+(٣×١-)] & [(١×١)+(٢×١-)] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (١٦+٣-) & (٨+٩) & (٤+٦) \\ (٨+٢-) & (٤+٦) & (٢+٤) \\ (٤+١) & (٢+٣-) & (١+٢-) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٣ & ١٧ & ١٠ \\ ٦ & ١٠ & ٦ \\ ٥ & ١- & ١- \end{pmatrix}$$

٣- مـــن نتــيجة ضرب المصفوفتين بعد تبديلهما من حيث الترتيب طبقاً للحل السابق نجد أن : $\overset{*}{أ} \times \overset{*}{ب} \neq \overset{*}{ب} \times \overset{*}{أ}$ **.**

مثال (٧)

بفرض وجود المصفوفات التالية :

$$\overset{*}{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \end{bmatrix} ، \overset{*}{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ & -٣ & ٢ \end{bmatrix} ، \overset{*}{جـ} = \begin{bmatrix} -٣ \\ ٢ \end{bmatrix} ، \overset{*}{د} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \\ -٣ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

والمطلوب :

(١) إيجاد $\overset{*}{أ} \times \overset{*}{جـ}$ (٢) إيجاد $\overset{*}{ب} \times \overset{*}{د}$

الحــل :

$$(١)\ \overset{*}{أ} \times \overset{*}{جـ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٣ \\ ٢ \end{bmatrix} = [٢\ (-٣) + ٥\ (٢)] = [(-٦ + ١٠)] = [٤]$$

$$(٢)\ \overset{*}{ب} \times \overset{*}{د} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ & -٣ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \\ -٣ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

$$= [١\ (٢) + (-٢)\ (٥) + (-٣)\ (-٣) + ٢\ (٤)]$$

$$= [٢ - ١٠ + ٩ + ٨] = [٩]$$

وفي هذا المثال يمكن ملاحظة الآتي :

(١) نلاحظ أن مصفوفة الصف الواحد (المتجه الصفى) عادة تكتب على الشمال ومصفوفة المتجه العمودى تكتب على اليمين فى حالات ضرب المصفوفات (ومثال ذلك أ جـ).

(٢) مصفوفات المتجه الصفى والمتجه العمودى لابد أن يحتوى على نفس العدد من العناصر حتى يمكن ضربها جبرياً- فمثلاً لايمكن الحصول على حاصل ضرب المصفوفات $\overset{*}{أ} \times \overset{*}{ب}$ أو $\overset{*}{جـ} \times \overset{*}{د}$.

(٤-٢-٥-٣) كيفية إيجاد مقلوب المصفوفة: *Inverse of the matrix*

لا توجد طريقة مباشرة يمكن بمقتضاها قسمة مصفوفة على مصفوفة أخرى، وسوف نتعرض فيما يلي لكيفية إيجاد مقلوب (معكوس) المصفوفة من الناحية الرياضية ، وذلك على النحو التالي.

إذا كانت أ ، ب مصفوفتين مربعتين وأن:

أ* × ب* = I* (مصفوفة الوحدة)

فإنه يقال أن ب* عبارة عن مقلوب أ* ، وفي هذه الحالة يُرمز لمقلوب المصفوفة أ* بالرمز أ*$^{-1}$

ولا يُشترط أن يكون لكل مصفوفة مربعة مقلوب إذ يشترط لأن يكون للمصفوفة المربعة مقلوب أن يكون محدد هذه المصفوفة مختلفاً عن الصفر ، وعلى ذلك يمكن القول بأنه لكي يكون للمصفوفة مقلوب فإنه يجب توافر شرطين مجتمعين في تلك المصفوفة وهما :

١. أن تكون المصفوفة مربعة .

٢. أن يكون قيمة محدد المصفوفة لا يساوي الصفر (أى أنه إذا كانت المصفوفة الأصلية هي المصفوفة ب* ، فإنه يجب أن يكون |ب*| ≠ صفر) .

وتوجد عدة طرق لإيجاد مقلوب المصفوفة ، ولا يتسع المجال هنا لذكر تلك الطرق ، ولسوف نقتصر في هذا الكتاب على طريقة واحدة فقط ألا وهي طريقة المرافقات .

طريقة المرافقات لإيجاد مقلوب المصفوفة :

ولشرح هذه الطريقة سوف تبدأ بمصفوفة مربعة من الدرجة الثانية محددها لا يساوى صفراً ولتكن :

$$\overset{*}{أ} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix}$$

ولإيجاد مقلوب المصفوفة $\overset{*}{أ}$ أي $\overset{*}{أ}^{-١}$ نقوم بالخطوات التالية :

أولاً) توجد قيمة محدد المصفوفة ، أي نوجد قيمة $|\overset{*}{أ}|$

ثانياً) نوجد مصفوفة المرافقات حيث نحسب لكل عنصر من عناصر المصفوفة $\overset{*}{أ}$ المرافق الخاص به وذلك بحذف الصف والعمود الواقع فيه هذا العنصر ، وتكون بإشارات تبادلية حيث :

مرافق $أ_{١١}$ $= (-١)^{١+١}\ أ_{٢٢}$ $= أ_{٢٢}$

مرافق $أ_{١٢}$ $= (-١)^{٢+١}\ أ_{٢١}$ $= -أ_{٢١}$

مرافق $أ_{٢١}$ $= (-١)^{١+٢}\ أ_{١٢}$ $= -أ_{١٢}$

مرافق $أ_{٢٢}$ $= (-١)^{٢+٢}\ أ_{١١}$ $= أ_{١١}$

وسوف نرمز لمصفوفة المرافقات بالرمز $\overset{*}{أ}_{(م)}$

ثالثاً) نوجد معكوس مصفوفة المرافقات $\overset{*}{أ}_{(م)}$ ٠

رابعاً) نقسم كل مكون من مكونات المصفوفة $\overset{*}{أ}_{(م)}$ على قيمة المحدد الناتج من البند (أولاً) فنحصل على مقلوب المصفوفة $\overset{*}{أ}$ ، أي أن :

$$\overset{*}{أ}^{-١} = \frac{١}{|\overset{*}{أ}|} \times \overset{*}{أ}_{(م)}$$

مثال (٨)

أوجد مقلوب المصفوفة $\overset{*}{ب}$ حيث :

$$\overset{*}{ب} = \begin{pmatrix} ١- & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$$

الحــل :

سوف نتبع نفس الخطوات السابقة بحسب ترتيبها:

أولاً) توجد قيمة محدد المصفوفة ب = $|\overset{*}{ب}|$

$$= \begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = -٤ - ٢ = -٦$$

ثانياً) نوجد مصفوفة المرافقات $\overset{*}{ب}$(م)، حيث :

$$\overset{*}{ب}(م) = \begin{pmatrix} +|٤| & -|١| \\ -|٢| & +|-١| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$$

ثالثاً) نوجد مصفوفة المرافقات المبدلة (المحورة) $\overline{\overset{*}{ب}}$(م) :

$$\overline{\overset{*}{ب}}(م) = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ -١ & -١ \end{pmatrix}$$

رابعاً) نطبق العلاقة : $\overset{*}{ب}^{-١} = \frac{١}{|\overset{*}{ب}|} \times \overline{\overset{*}{ب}}(م)$

$$\therefore \overset{*}{ب}^{-١} = \frac{١}{-٦} \times \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ -١ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{٤}{٦} & \frac{٢}{٦} \\ \frac{١}{٦} & \frac{١}{٦} \end{pmatrix}$$

وللتحقق من صحة الحل ، يجب أن يكون : $\overset{*}{\text{ب}} \times \overset{*}{\text{ب}}^{-1} = \overset{*}{I}$ ، وذلك على النحو التالي :

$$\overset{*}{\text{ب}} \times \overset{*}{\text{ب}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 1 \end{pmatrix}$$

∴ الحل المتوصل إليه صحيح ٠

وإذا كانت المصفوفة $\overset{*}{\text{أ}}$ مصفوفة مربعة من درجة (٣×٣) فلإيجاد مقلوبها إذا كان محددها لايساوى صفر نتبع نفس الخطوات السابقة.

نفرض أن: $\overset{*}{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{pmatrix}$

فلإيجاد مقلوبها نقوم بما يلي :

أولاً) توجد قيمة محدد المصفوفة $\overset{*}{\text{أ}}$ أي نوجد قيمة $\left|\overset{*}{\text{أ}}\right|$

ثانياً) نوجد مصفوفة المرافقات حيث نحسب لكل عنصر من عناصر المصفوفة $\overset{*}{\text{أ}}$ المرافق الخاص به وذلك بحذف الصف والعمود الواقع فيه هذا العنصر ، وتكون بإشارات تبادلية حيث:

مرافق العنصر $\text{أ}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} = \text{م}_{11}$

مرافق العنصر $\text{أ}_{12} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} = -\text{م}_{12}$

مرافق العنصر $أ_{١٣} = (-١)^{٣+١} \begin{vmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = م_{١٣}$

مرافق العنصر $أ_{٢١} = (-١)^{١+٢} \begin{vmatrix} أ_{٣٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} = -م_{٢١}$

مرافق العنصر $أ_{٢٢} = (-١)^{٢+٢} \begin{vmatrix} أ_{٣١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} = م_{٢٢}$

مرافق العنصر $أ_{٢٣} = (-١)^{٣+٢} \begin{vmatrix} أ_{٣١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{١٢} \end{vmatrix} = -م_{٣٢}$

مرافق العنصر $أ_{٣١} = (-١)^{١+٣} \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} = م_{٣١}$

مرافق العنصر $أ_{٣٢} = (-١)^{٢+٣} \begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix} = -م_{٣٢}$

مرافق العنصر $أ_{٣٣} = (-١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{vmatrix} = م_{٣٣}$

وعلى ذلك فإن: $\overset{*}{أ}(م) = \begin{pmatrix} م_{٣١} & -م_{٢١} & م_{١١} \\ -م_{٣٢} & م_{٢٢} & -م_{١٢} \\ م_{٣٣} & -م_{٢٣} & م_{١٣} \end{pmatrix}$

ثالثاً) نوجد معكوس مصفوفة المرافقات $\overset{*}{أ}(م)$:

رابعاً) نقسم مكونات معكوس مصفوفة المرافقات $\overset{*}{أ}(م)$ على قيمة المحدد الناتج من البند أولاً فنحصل على مقلوب المصفوفة $\overset{*}{أ}$ أي أن :

$$\overset{*}{أ}^{-١} = \frac{١}{|\overset{*}{أ}|} \times \overset{*}{أ}(م)$$

مثال (٩)

أوجد مقلوب المصفوفة $\overset{*}{ع}$ حيث :

$$\overset{*}{ع} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ & ٢ \end{pmatrix}$$

الحــل :

أولاً) نوجد قيمة محدد المصفوفة $\overset{*}{ع}$ بإستخدام العمود الأول ، حيث :

$$\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} -١ & ١ \\ -٤ & ٢ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ٢ \; (٤-٤) - ١ \; (-٢+٤) + ٣ \; (١-٢) = \text{صفر} - ٢ - ٣ = \boxed{-٥}$$

ثانياً) نوجد مصفوفة المرافقات $\overset{*}{ع}(م)$، حيث :

$$\overset{*}{ع}(م) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -١ & ١ \\ -٤ & ٢ \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{صفر} & -٥ & -١٠ \\ -٢ & ١ & ٥ \\ -١ & ٣ & ٥ \end{pmatrix}$$

ثالثاً) نوجد معكوس مصفوفة المرافقات $\overset{*}{\bar{ع}}(م)$:

$$\overset{*}{\bar{ع}}(م) = \begin{pmatrix} \text{صفر} & -٢ & -١ \\ -٥ & ١ & ٣ \\ -١٠ & ٥ & ٥ \end{pmatrix}$$

رابعاً) نطبق العلاقة : $\overset{*}{\text{ع}}^{-1} = \dfrac{1}{|\overset{*}{\text{ع}}|} \times \overline{\overset{*}{\text{ع}}}(\text{م})$

$$\therefore \overset{*}{\text{ع}}^{-1} = \frac{\text{١}}{\text{٥}-} \times \begin{pmatrix} \text{١}- & \text{٢}- & \text{صفر} \\ \text{٣} & \text{١} & \text{٥}- \\ \text{٥} & \text{٥} & \text{١٠}- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\text{١}}{\text{٥}} & \frac{\text{٢}}{\text{٥}} & \text{صفر} \\ \frac{\text{٣}}{\text{٥}-} & \frac{\text{١}}{\text{٥}-} & \frac{\text{٥}}{\text{٥}} \\ \frac{\text{٥}}{\text{٥}-} & \frac{\text{٥}}{\text{٥}-} & \frac{\text{١٠}}{\text{٥}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٠,٢} & \text{٠,٤} & \text{صفر} \\ \text{٠,٦}- & \text{٠,٢}- & \text{١} \\ \text{١}- & \text{١}- & \text{٢} \end{pmatrix}$$

وللتحقق من صحة الحل ، يجب أن يكون : $\overset{*}{\text{ع}} \times \overset{*}{\text{ع}}^{-1} = \overset{*}{I}$ ، وذلك على النحو التالي :

$$\overset{*}{\text{ع}} \times \overset{*}{\text{ع}}^{-1} = \begin{pmatrix} \text{١} & \text{١}- & \text{٢} \\ \text{١}- & \text{٢} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{٤}- & \text{٣} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{٠,٢} & \text{٠,٤} & \text{صفر} \\ \text{٠,٦}- & \text{٠,٢}- & \text{١} \\ \text{١}- & \text{١}- & \text{٢} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & \text{١} \\ \text{صفر} & \text{١} & \text{صفر} \\ \text{١} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{pmatrix} = \overset{*}{I}_{\text{٣}}$$

(٤-٢-٥-٤) قسمة المصفوفات :

بعد التعرف على كيفية إيجاد مقلوب المصفوفة ، فإنه يمكن إجراء عملية القسمة على المصفوفات ، ويمكن إجراء ثلاثة أنواع من عمليات القسمة بالنسبة للمصفوفات وهي :

١. قسمة المصفوفة على مقدار ثابت

٢. قسمة مقدار ثابت على مصفوفة

٣. قسمة المصفوفة على مصفوفة أخرى

الحالة الأولى : قسمة المصفوفة على مقدار ثابت :

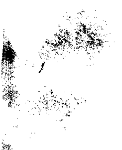
يمكن قسمة المصفوفة على مقدار ثابت عن طريق قسمة كل عنصر من عناصر المصفوفة على هذا الثابت ، ويتضح ذلك كما هو الحال في مقلوب المصفوفة ٠

الحالة الثانية : قسمة مقدار ثابت على مصفوفة :

يمكن قسمة مقدار ثابت على مصفوفة عن طريق ضرب المقدار الثابت في مقلوب المصفوفة ٠أي أنه إذا كان (ك) مقدار ثابت ، فإن :

$$\frac{ك}{\overset{*}{ب}} = ك \times \overset{*}{ب}^{-1}$$

ويُشترط هنا أن تكون المصفوفة المقسوم عليها مربعة ولها مقلوب محدد ومعروف ٠



الحالة الثالثة : قسمة المصفوفة على مصفوفة أخرى :

يُشترط لقسمة المصفوفة $\overset{*}{س}$ على المصفوفة $\overset{*}{ص}$:

١. أن تكون المصفوفتان قابلتان للضرب.

٢. أن تكون المصفوفة المقسوم عليها مربعة ولها مقلوب معروف.

وفي هذه الحالة يمكن قسمة المصفوفة $\overset{*}{س}$ على المصفوفة $\overset{*}{ص}$ عن طريق ضرب المصفوفة $\overset{*}{س}$ في مقلوب المصفوفة $\overset{*}{ص}$، أي أن :

$$\frac{\overset{*}{س}}{\overset{*}{ص}} = \overset{*}{س} \times \overset{*}{ص}^{-١}$$

مثال (١٠)

أعطيت لك المصفوفات التالية :

$$\overset{*}{س} = \begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ٤ \end{pmatrix} ، \quad \overset{*}{ص} = \begin{pmatrix} ١٨ & ٩- & ٩ \\ ٩- & ٢٧ & صفر \\ ٣٦ & ٩ & ٢٧- \end{pmatrix} ، \quad \overset{*}{ع} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١- & ٢ \\ ١- & ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

فأوجد كلاً من : $\frac{١}{٢}\overset{*}{س}$ ، $\frac{\overset{*}{ص}}{\overset{*}{ع}}$

الحل :

أولاً : إيجاد : $\frac{١}{٢}\overset{*}{س}$

$$\frac{١}{٢}\overset{*}{س} = \frac{١}{٢} \times \begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٢- & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٦}{٢} & \frac{٢}{٢} \\ \frac{٢-}{٢} & \frac{٤}{٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}$$

ثانياً : إيجاد : $\frac{ص^*}{ع^*}$:

وهـنا نلاحـظ أن المصفوفتين $ص^*$ ، $ع^*$ من الدرجة (٣×٣) ، ومن ثم يمكن ضـربهما لـتحقق شرط الضرب ، ومن ناحية أخرى فإن المصفوفة $ع^*$ مربعة ومحددهـا لا يسـاوي الصفر ، وعلى ذلك يمكن إيجاد خارج قسمة المصفوفة $ص^*$ على المصفوفة $ع^*$ ، حيث :

$$\frac{ص^*}{ع^*} = ص^* \times ع^{*-١}$$

وبتطبيق خطوات مقلوب المصفوفة السابق دراستها على المصفوفة $ع^*$ ، نجد أن :

$$ع^{*-١} = \begin{pmatrix} \frac{-٨}{٩} & \frac{٥}{٩} & \frac{٧}{٩} \\ \frac{٥}{٩} & \frac{-٢}{٩} & \frac{-١}{٩} \\ \frac{٧}{٩} & \frac{-١}{٩} & \frac{-٥}{٩} \end{pmatrix}$$

وعلى ذلك نجد أن :

$$\frac{ص^*}{ع^*} = \begin{pmatrix} ٩ & -٩ & ١٨ \\ صفر & ٢٧ & -٩ \\ -٢٧ & ٩ & ٣٦ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-٨}{٩} & \frac{٥}{٩} & \frac{٧}{٩} \\ \frac{٥}{٩} & \frac{-٢}{٩} & \frac{-١}{٩} \\ \frac{٧}{٩} & \frac{-١}{٩} & \frac{-٥}{٩} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٥ & -٢ \\ ٨ & -٥ & ٢ \\ ٥٧ & -٢١ & -٤٢ \end{pmatrix}$$

(٤-٢-٦) إستخدام المصفوفات في حل المعادلات الخطية:

يتمـــثل التطبـــيق المباشـــر لإســـتخدام المصفوفات في حل مجموعة المعادلات الخطية ، وفي هذه الوحدة نتناول كيفية استخدام المصفوفات في حل نظم المعادلات الخطية ، ولكي يمكن حل المعادلات باستخدام المصفوفات فلابد من توافر شرطين أساسيين هما:

١. أن يكون عدد المعادلات في النظام الخطي مساو لعدد المجاهيل .
٢. أن تكون مصفوفة المجاهيل مصفوفة مربعة ولها مقلوب .

فإذا كان لدينا مجموعة المعادلات الخطية:

$$أ_١ س + ب_١ ص + جـ_١ ع = ك_١$$

$$أ_٢ س + ب_٢ ص + جـ_٢ ع = ك_٢$$

$$أ_٣ س + ب_٣ ص + جـ_٣ ع = ك_٣$$

فإنـــه يمكـــن التعبير عن هذا النظام الخطي بإستخدام المصفوفات على النحو التالى:

$$\begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ك_١ \\ ك_٢ \\ ك_٣ \end{pmatrix}$$

ويمكن اختصار ذلك في الصورة :

$$\overset{*}{أ}\ \overset{*}{س} = \overset{*}{ك}$$

حيث :

$$\overset{*}{أ} = \begin{pmatrix} أ_١ & ب_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & جـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & جـ_٣ \end{pmatrix}$$
= مصــفوفة المعــاملات وهى مصفوفة مربعة عناصرها هى المعاملات المرافقة للمجاهيل س ، ص ، ع.

$$\overset{*}{س} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$$
= متجه عمودي المجاهيل المطلوب تقديرها.

$$\overset{*}{ك} = \begin{pmatrix} ك_١ \\ ك_٢ \\ ك_٣ \end{pmatrix}$$
= مــتجه عمــودي الحــدود المطلقــة فى الطرف الأيسر من المعادلات.

ولحل مجموعة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات نقوم بالآتي :

١- نوجـد مقلــوب مصــفوفة المعــاملات أي $\overset{*}{أ}^{-١}$ مع التحقق من الشروط الموجبة لذلك ٠

٢- نضرب مقلوب مصفوفة المعاملات × متجه عمودي الحدود المطلقة $\overset{*}{ك}$

وعلــى ذلك أنه إذا وُجد نظام خطي بالصورة السابقة ، فإنه يمكن تطبيق الــنموذج الأتى لإستخدام المصفوفات فى حل المعادلات الخطية للحصول على قيم المجاهيل المختلفة بها :

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = [\overset{*}{أ}]^{-١} \times \begin{pmatrix} ك_١ \\ ك_٢ \\ ك_٣ \end{pmatrix}$$

∴ مــتجه عمــودي المجاهيل = مقلوب مصفوفة المعاملات × متجه عمودي الحدود المطلقة



مثال (١١)

المطلوب حل المعادلتين التاليتين باستخدام المصفوفات :

س − ص = ٢

٢س +٣ ص = ٩

الحــل :

يمكن التعبير عن المعادلتين السابقتين بإستخدام المصفوفات كما يلي :

$$\begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٩ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}^{-١} \times \begin{pmatrix} ٢ \\ ٩ \end{pmatrix}$$

أولاً : نوجد مقلوب مصفوفة المعاملات ، وهي : $\begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، وذلك كما يلي :

١) توجد قيمة محدد مصفوفة المعاملات $= \begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ + ٢ = ٥$

٢) نوجد مصفوفة المرافقات $= \begin{pmatrix} +|٣| & -|٢| \\ -|١-| & +|١| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣+ & ٢- \\ ١+ & ١+ \end{pmatrix}$

٣) نوجد معكوس مصفوفة المرافقات $= \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢- & ١ \end{pmatrix}$

٤) $\therefore \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{٥} \times \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢- & ١ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{١}{٥} \\ \frac{٢-}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix} = \text{مقلوب مصفوفة المعاملات}$$

ثانياً : نطبق نموذج حل المعادلات باستخدام المصفوفات ، حيث :

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}^{-١} \times \begin{pmatrix} ٢ \\ ٩ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{١}{٥} \\ \frac{٢-}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ \\ ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(+\frac{٦}{٥} + \frac{٩}{٥}\right) \\ \left(-\frac{٤}{٥} + \frac{٩}{٥}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{١٥}{٥}\right) \\ \left(\frac{٥}{٥}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ١ \end{pmatrix}$$

∴ س = ٣ ، ص = ١

مثال (١٢)

حل المعادلتين التاليتين باستخدام المصفوفات :

س + ص = ٤

٢س +٣ ص = ١١

الحـــل :

يمكـــن وضع المعادلتين المطلوب حلهما طبقاً لنموذج حل المعادلات بإستخدام المصفوفات على النحو التالى :

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}^{-١} \times \begin{pmatrix} ٤ \\ ١١ \end{pmatrix}$$

وللتوصل لقيم المجاهيل س ، ص باستخدام النموذج السابق نقوم بالآتي :

أولاً : نوجد مقلوب مصفوفة المعاملات ، وهي : $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، وذلك كما يلي :

١) توجد قيمة محدد مصفوفة المعاملات = $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٣ – ٢ = ١

٢) نوجد مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} |٢|- & |٣|+ \\ |١|+ & |١|- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢- & ٣+ \\ ١+ & ١- \end{pmatrix}$

٣) نوجد معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} ١- & ٣+ \\ ١+ & ٢- \end{pmatrix}$

٤) ∴ $\begin{pmatrix} ١- & ٣+ \\ ١+ & ٢- \end{pmatrix} \times \frac{١}{١} = {}^{١-}\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

مقلوب مصفوفة المعاملات = $\begin{pmatrix} ١- & ٣+ \\ ١+ & ٢- \end{pmatrix}$ =

ثانياً : نطبق نموذج حل المعادلات باستخدام المصفوفات ، حيث :

$$\begin{pmatrix} ٤ \\ ١١ \end{pmatrix} \times {}^{١-}\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (١١-١٢+) \\ (١١+٨-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ١١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١- & ٣+ \\ ١+ & ٢- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} \therefore$$

∴ س = ١ ، ص = ٣

ملحوظة هامة:

يتم تطبيق نفس الخطوات وبالترتيب السابق في حل أي من مجموعات المعادلات بحيث يكون عدد المجاهيل مساوٍ لعدد المعادلات وأن يكون من الممكن إيجاد مقلوب مصفوفة المعاملات ، وفيما يلي نتناول تطبيق لإستخدام المصفوفات في حل مجموعة مكونة من ثلاث معادلات ، أي مجموعة المعادلات التي تحتوي على ثلاث مجاهيل (وليكن س ، ص ، ع) .

مثال (١٣)

المطلوب إستخدام المصفوفات فى حل مجموعة لمعادلات التالية ؟

س + ص + ع = ٢

٢س + ص + ع = ٣

س − ص + ع = ٤

الحـــل :

يمكن وضع نظام المعادلات فى الشكل التالى:

$$\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$$

ولحـــل هـــذه المعـــادلات يمكـــن وضعها طبقاً لنموذج حل المعادلات بإستخدام المصفوفات على النحو التالى :

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & ١ \end{pmatrix}^{-١} \times \begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$$

وللتوصل لقيم المجاهيل س ، ص ، ع نقوم بالآتي :

أولاً : نوجد مقلوب مصفوفة المعاملات ، وهي : $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ١ & -١ & ١ \end{pmatrix}$ **، حيث :**

١) نوجد قيمة محدد المصفوفة Δ بإستخدام العمود الأول ، حيث :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1+1) - 2(1+1) + 1(1-1) = -2$$

٢) نوجد مصفوفة المرافقات ، حيث :

$$\text{مصفوفة المرافقات} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{مصفوفة المرافقات} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

٣) نوجد معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

٤) $\therefore$ مقلوب مصفوفة المعاملات = $\frac{1}{-2} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

ثانياً : نطبق نموذج حل المعادلات باستخدام المصفوفات ، حيث :

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4-6+0}{-2} \\ \frac{-2+0+4}{-2} \\ \frac{-6+6-4}{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ١ ، ص = -١ ، ع = ٢

تمارين محلولة

تمرين (١)

إستخدام المصفوفات في حل مجموعة المعادلات التالية :

س + ص = ٥

٢س – ص = ٧

الحـــل :

يمكـــن وضع المعادلتين المطلوب حلهما طبقاً لنموذج حل المعادلات بإستخدام المصفوفات على النحو التالى :

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

وللتوصل لقيم المجاهيل س ، ص باستخدام النموذج السابق نقوم بالآتي :

أولاً : نوجد مقلوب مصفوفة المعاملات ، وهي : $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}$ ، كما يلي :

١) قيمة محدد مصفوفة المعاملات = $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ٢ \end{vmatrix} = ١- - ٢ = ٣-$

٢) مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} -|٢| & +|١-| \\ +|١| & -|١| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢- & ١- \\ ١+ & ١- \end{pmatrix}$

٣) معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} ١- & ١- \\ ١+ & ٢- \end{pmatrix}$

٤) ∴ $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}^{١-} = \frac{١}{٣-} \times \begin{pmatrix} ١- & ١- \\ ١+ & ٢- \end{pmatrix}$ = مقلوب مصفوفة المعاملات

ثانياً : نطبق نموذج حل المعادلات باستخدام المصفوفات ، حيث :

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}^{١-} \times \begin{pmatrix} ٥ \\ ٧ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{١}{٣-} \times \begin{pmatrix} ١- & ١- \\ ١+ & ٢- \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥ \\ ٧ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{١}{٣-} \times \begin{pmatrix} \frac{(٧ - ٥-)}{٣-} \\ \frac{(٧ + ١٠-)}{٣-} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{١٢-}{٣-} \\ \frac{٣-}{٣-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ١ \end{pmatrix}$$

∴ س = ٤ ، ص = ١

تمرين (٢) :

استخدم المصفوفات فى حل مجموعة المعادلات الآتية:

$$٣\text{س} - \text{ص} + ٢\text{ع} = -١$$

$$٢\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = ٥$$

$$\text{س} + ٢\text{ص} + \text{ع} = ٤$$

الحل :

ولحل هذه المعادلات يمكن وضعها طبقاً لنموذج حل المعادلات بإستخدام المصفوفات على النحو التالى :

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}^{-١} \times \begin{pmatrix} -١ \\ ٥ \\ ٤ \end{pmatrix}$$

وللتوصل لقيم المجاهيل س ، ص ، ع نقوم بالآتي :

أولاً : نوجد مقلوب مصفوفة المعاملات ، وهي : $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ **، حيث :**

١) نوجد قيمة محدد المصفوفة Δ بإستخدام العمود الأول ، حيث :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٣\begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ٣\,(١ + ٢) - ٢\,(-١ - ٤) + ١\,(١ - ٢)$$

$$= ٩ + ١٠ - ١ = ١٨$$

٢) إيجاد مصفوفة المرافقات:

مصفوفة المرافقات =
$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & -١ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

∴ مصفوفة المرافقات =
$$\begin{pmatrix} ٣ & -٣ & ٣ \\ ٥ & ١ & -٧ \\ -١ & ٧ & ٥ \end{pmatrix}$$

٣) إيجاد معكوس مصفوفة المرافقات =
$$\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & -١ \\ -٣ & ١ & ٧ \\ ٣ & -٧ & ٥ \end{pmatrix}$$

٤) يكون مقلوب مصفوفة المعاملات =
$$\frac{١}{١٨}\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & -١ \\ -٣ & ١ & ٧ \\ ٣ & -٧ & ٥ \end{pmatrix}$$

ثانياً : نطبق نموذج حل المعادلات باستخدام المصفوفات ، حيث :

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}^{-١} \times \begin{pmatrix} -١ \\ ٥ \\ ٤ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{١}{١٨} \begin{pmatrix} ٣ & ٥ & -١ \\ -٣ & ١ & ٧ \\ ٣ & -٧ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -١ \\ ٥ \\ ٤ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-٣+٢٥-٤}{١٨} \\ \frac{+٣+٥+٢٨}{١٨} \\ \frac{-٣-٣٥+٢٠}{١٨} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١٨}{١٨} \\ \frac{٣٦}{١٨} \\ \frac{-١٨}{١٨} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ -١ \end{pmatrix}$$

∴ س = ١

∴ ص = ٢

∴ ع = -١

(٤-٢-٦) التطبيقات التجارية للمحددات والمصفوفات :

مما سبق وجدنا أن كل من علم المحددات والمصفوفات يُستخدم في حل المعادلات الخطية ، وعلى ذلك نجد أن من أهم التطبيقات العملية للمحددات والمصفوفات إستخدامهما في التعبير عن بعض المشكلات التجارية و كذلك حل البعض من تلك المشكلات التى يمكن التعبير عنها في صورة معادلات خطية بشرط أن يكون محدد المعاملات لتلك المعادلات لا يساوي الصفر ٠

ونتناول فيما يلي التطبيق العملي لنظم المحددات والمصفوفات في حل البعض من المشكلات التجارية والإقتصادية التي يمكن التعبير عنها في صورة معادلات خطية ٠

التطبيق الأول :

يقوم مصنع وليد المهدي بإنتاج نوعين من السلع هما س، ص تحتاج الوحدة من المنتج س إلى ساعتين فى المركز الأول وساعتين فى المركز الثاني. أما النوع ص تحتاج الوحدة منه إلى ساعتين فى المركز الأول وثلاث ساعات فى المركز الثانى. فإذا كانت طاقة المركز الأول ٢٠٠ ساعة والمركز الثاني ٢٥٠ ساعة.

والمطلوب :

إيجاد عدد الوحدات اللازم إنتاجها من النوعين بحيث يمكن إستغلال طاقة المصنع بالكامل في الحالتين التاليتين :

١. بإستخدام المحددات ؟

٢. بإستخدام المحددات ؟

الحل :

يمكن تلخيص المشكلة السابقة في صورة معادلتين كما يلي :

٢ س + ٢ ص = ٢٠٠

٢ س + ٣ ص = ٢٥٠

ولإيجاد س ، ص التي تمثل عدد الوحدات اللازم إنتاجها من النوعين يتم حل المعادلتين السابقتين باستخدام المحددات أو المصفوفات على النحو التالي :

أولاً : باستخدام المحددات :

(١) محدد المعاملات Δ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$

= (٢×٣) – (٢×٢) = ٦ – ٤ = ٢

(٢) محدد س: Δ س = $\begin{vmatrix} ٢٠٠ & ٢ \\ ٢٥٠ & ٣ \end{vmatrix}$ = (٢٠٠×٣) – (٢٥٠×٢)

= ٦٠٠ – ٥٠٠ = **١٠٠**

(٣) محدد ص: Δ ص = $\begin{vmatrix} ٢ & ٢٠٠ \\ ٢ & ٢٥٠ \end{vmatrix}$ = (٢×٢٥٠) – (٢×٢٠٠)

= ٥٠٠ + ٤٠٠ = **١٠٠**

∴ س = $\frac{\Delta س}{\Delta}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠

∴ ص = $\frac{\Delta ص}{\Delta}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠

وعلى ذلك نتبين أنه يجب إنتاج ٥٠ وحدة من المنتج الأول ، ٥٠ وحدة من المنتج الثاني حتى يمكن إستغلال طاقة المصنع بالكامل ٠

ثانياً : باستخدام المصفوفات :

يمكـــن وضع المعادلتين المطلوب حلهما طبقاً لنموذج حل المعادلات بإستخدام المصفوفات على النحو التالى :

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}^{-١} \times \begin{pmatrix} ٢٠٠ \\ ٢٥٠ \end{pmatrix}$$

وللتوصل لقيم المجاهيل س ، ص باستخدام النموذج السابق نقوم بالآتي :

أولاً : نوجد مقلوب مصفوفة المعاملات ، وهي : $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، وذلك كما يلي :

١) توجد قيمة محدد مصفوفة المعاملات = $\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٦ - ٤ = ٢$

٢) نوجد مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} +|٣| & -|٢| \\ -|٢| & +|٢| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +٣ & -٢ \\ -٢ & +٢ \end{pmatrix}$

٣) نوجد معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$

٤) $\therefore \begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{٢} \times \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix}$ = مقلوب مصفوفة المعاملات

ثانياً : نطبق نموذج حل المعادلات باستخدام المصفوفات ، حيث :

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}^{-١} \times \begin{pmatrix} ٢٠٠ \\ ٢٥٠ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{١}{٢} \times \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -٢ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢٠٠ \\ ٢٥٠ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢} \times \begin{pmatrix} (+٦٠٠ - ٥٠٠) \\ (-٤٠٠ + ٥٠٠) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥٠ \\ ٥٠ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ٥٠ ، ص = ٥٠

التطبيق الثاني :

شــركة طيران لديها ثلاثة أنواع من الطائرات حاملات البضائع ، فــإذا كانــت الشــركة تقــوم بنقل ثلاثة أنواع من البضائع أ، ب، جــ بإســتخدام أنواع الطائرات المختلفة. فتستطيع الطائرة من النوع الأول نقل وحدة واحدة من كل من (أ) ، (جــ) ولا تستطيع نقل شئ من (ب). وتســتطيع الطائرة من النوع الثاني نقل وحدتين من (أ) ووحدة واحدة مــن كل من (ب)، (جــ). وتستطيع الطائرة من النوع الثالث نقل وحدة واحدة من (أ) ، ونقل وحدتين من كل من (ب)، (جــ).

والمطلوب تحديد عدد الرحلات التي يجب أن تقوم بها الأنواع المختلفة مــن الطائــرات لــنقل ١٦ وحدة من البضاعة (أ) ، ١٠ وحدات من البضاعة (ب) ، ١٢ وحدة من البضاعة (جــ) وذلك :

١. بإستخدام المحددات ؟

٢. بإستخدام المحددات ؟

الحــل :

بفرض أن عدد رحلات النوع الأول من الطائرات هو س ، وعدد رحلات الــنوع الثانــي مــن الطائرات هو ص ، وعدد رحلات النوع الثالث من الطائــرات هو ع ، فيمكن صياغة المشكلة السابقة في صورة مجموعة من المعادلات الخطية على النحو التالي :

س + ٢ ص + ع = ١٦

ص + ٢ ع = ١٠

س + ص + ٢ ع = ١٢

ويمكن إيجاد عدد رحلات كل نوع من الطائرات باستخدام المحددات أو المصفوفات لحساب قيم س ، ص ، ع على النحو التالي :

أولاً : باستخدام المحددات :

(١) محدد المعاملات = Δ = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٠ \\ ٢ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ = ١ $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ − صفر + ١ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$

= ١ (٢−٢) − صفر + ١(٤ − ١)

= صفر − صفر + ٣ = $\boxed{٣}$

(٢) محدد س = Δ س = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١٦ \\ ٢ & ١ & ١٠ \\ ٢ & ١ & ١٢ \end{vmatrix}$

= ١٦ $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ − ١٠ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$ + ١٢ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix}$

= ١٦ (٢−٢) − ١٠(٤−١) + ١٢(٤ − ١)

= صفر − ٣٠ + ٣٦ = $\boxed{٦}$

(٣) محدد ص = Δ ص = $\begin{vmatrix} ١ & ١٦ & ١ \\ ٢ & ١٠ & ٠ \\ ٢ & ١٢ & ١ \end{vmatrix}$ = ١ $\begin{vmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٢ & ١٢ \end{vmatrix}$ − صفر + ١ $\begin{vmatrix} ١ & ١٦ \\ ٢ & ١٠ \end{vmatrix}$

= ١ (٢٠−٢٤) − صفر + ١(٣٢ − ١٠)

= − ٤ − صفر + ٢٢ = $\boxed{١٨}$

(٤) محدد ع = Δ ع = $\begin{vmatrix} ١٦ & ٢ & ١ \\ ١٠ & ١ & ٠ \\ ١٢ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ = ١ $\begin{vmatrix} ١٠ & ١ \\ ١٢ & ١ \end{vmatrix}$ − صفر + ١ $\begin{vmatrix} ١٦ & ٢ \\ ١٠ & ١ \end{vmatrix}$

= ١ (١٢−١٠) − صفر + ١(٢٠ − ١٦)

= ٢ − صفر + ٤ = $\boxed{٦}$

∴ س = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ ، ص = $\frac{١٨}{٣}$ = ٦ ، ع = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

ثانياً : باستخدام المصفوفات :

ولحــل مجموعة المعادلات يمكن وضعها طبقاً لنموذج حل المعادلات بإستخدام المصفوفات على النحو التالى :

$$\begin{pmatrix} ١٦ \\ ١٠ \\ ١٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & \text{صفر} \\ ٢ & ١ & ١ \end{pmatrix}^{-١} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$$

وللتوصل لقيم المجاهيل س ، ص ، ع نقوم بالآتي :

أولاً : نوجد مقلوب مصفوفة المعام لات ، وهي : $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & \text{صفر} \\ ٢ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، حيث :

١) نوجد قيمة محدد المصفوفة Δ بإستخدام العمود الأول ، حيث :

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} ١ + \text{صفر} - \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} ١ = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & \text{صفر} \\ ٢ & ١ & ١ \end{vmatrix} = \Delta$$

$$= ١(٢-٢) - \text{صفر} + ١\ (٤-١) = ٣$$

٢) نوجد مصفوفة المرافقات ، حيث :

$$\begin{pmatrix} ١- & ٢ & ٠ \\ ١ & ١ & ٣- \\ ١ & ٢- & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + \\ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + \end{pmatrix} = \text{مصفوفة المرافقات}$$

٣) نوجد معكوس مصفوفة المرافقات =

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٣- & ٠ \\ ٢- & ١ & ٢ \\ ١ & ١ & ١- \end{pmatrix}$$

٤) ∴ مقلوب مصفوفة المعاملات =

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٣- & ٠ \\ ٢- & ١ & ٢ \\ ١ & ١ & ١- \end{pmatrix} \times \frac{١}{٣}$$

ثانياً : نطبق نموذج حل المعادلات باستخدام المصفوفات ، حيث :

$$\begin{pmatrix} ١٦ \\ ١٠ \\ ١٢ \end{pmatrix} \times {}^{١-}\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & \text{صفر} \\ ٢ & ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ١٦ \\ ١٠ \\ ١٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ & ٣- & ٠ \\ ٢- & ١ & ٢ \\ ١ & ١ & ١- \end{pmatrix} \times \frac{١}{٣} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} \therefore$$

$$\begin{pmatrix} ٢ \\ ٦ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٦}{٣} \\ \frac{١٨}{٣} \\ \frac{٦}{٣} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (٣٦+٣٠-٠) \\ (٢٤-١٠+٣٢) \\ (١٢+١٠+١٦-) \end{pmatrix} \times \frac{١}{٣} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} \therefore$$

∴ س = ٢ ، ص = ٦ ، ع = ٢

وعلى ذلك نجد أنه يجب على كل من النوع الأول والثالث من الطائرات القيام برحلتين ، وعلى النوع الثاني من الطائرات القيام بست رحلات لنقل البضائع المتاحة بالشركة .

التطبيق الثالث :

ينتج أحد المصانع ثلاثة أنواع من السلع باستخدام ثلاثة مراكز للإنتاج ، حيث تحتاج الوحدة من المنتج الأول إلى ساعة واحدة فى المركز الأول وساعتين فى المركز الثالث . وتحتاج الوحدة من المنتج الثاني إلى ثلاث ساعات فى المركز الثانى وساعة واحدة فى المركز الثالث . وتحتاج الوحدة من المنتج الثالث إلى ساعة واحدة فى المركز الأول وساعتين فى المركز الثانى . فإذا علمت أن ساعات العمل اليومية المتاحة للمراكز الإنتاجية الثلاث كما يلي :

- •• المركز الأول ١٠
- •• المركز الثاني ١٦
- •• المركز الثالث ١٢

والمطلوب :

إيجاد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من الأنواع الثلاث يومياً بحيث يمكن إستغلال طاقة المصنع بالكامل في الحالتين التاليتين :

(١)بإستخدام المحددات ؟ (٢) بإستخدام المحددات ؟

الحـل :

بفرض أن عدد وحدات المنتج الأول (س) ، وعدد وحدات المنتج الثاني (ص) ، وعدد وحدات المنتج الثالث (ع) ، فيمكن صياغة المشكلة السابقة في صورة مجموعة من المعادلات الخطية على النحو التالي :

س + ع = ١٠

٣ص +٢ع = ١٦

٢س + ص = ١٢

ويمكن إيجاد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من الأنواع الثلاث يومياً باستخدام المحددات أو المصفوفات لحساب قيم س ، ص ، ع كما يلي :

أولاً : باستخدام المحددات :

(١) محدد المعاملات = Δ = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١ $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$ - صفر + ٢ $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$

= ١ (٠-٢) - صفر + ٢(٠ - ٣)

= -٢ - صفر - ٦ = **-٨**

(٢) محدد س = Δ س = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١٠ \\ ٢ & ٣ & ١٦ \\ ٠ & ١ & ١٢ \end{vmatrix}$

= ١٠ $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$ - ١٦ $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}$ + ١٢ $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$

= ١٠ (٠-٢) - ١٦ (٠-١) + ١٢(٠ - ٣)

= -٢٠ + ١٦ - ٣٦ = **-٤٠**

(٣) محدد ص = Δ ص = $\begin{vmatrix} ١ & ١٠ & ١ \\ ٢ & ١٦ & ٠ \\ ٠ & ١٢ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١ $\begin{vmatrix} ٢ & ١٦ \\ ٠ & ١٢ \end{vmatrix}$ - صفر + ٢ $\begin{vmatrix} ١ & ١٠ \\ ٢ & ١٦ \end{vmatrix}$

= ١ (٠-٢٤) - صفر + ٢(٢٠ - ١٦)

= -٢٤ - صفر + ٨ = **-١٦**

(٤) محدد ع = Δ ع = $\begin{vmatrix} ١٠ & ٠ & ١ \\ ١٦ & ٣ & ٠ \\ ١٢ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١ $\begin{vmatrix} ١٦ & ٣ \\ ١٢ & ١ \end{vmatrix}$ - صفر + ٢ $\begin{vmatrix} ١٠ & ٠ \\ ١٦ & ٣ \end{vmatrix}$

= ١ (٣٦-١٦) - صفر + ٢(٠ - ٣٠)

= ٢٠ - صفر - ٦٠ = **-٤٠**

∴ س = $\frac{-٤٠}{-٨}$ = ٥ ، ص = $\frac{-١٦}{-٨}$ = ٢ ، ع = $\frac{-٤٠}{-٨}$ = ٥

ثانياً : باستخدام المصفوفات :

ولحــل مجموعة المعادلات يمكن وضعها طبقاً لنموذج حل المعادلات بإستخدام المصفوفات على النحو التالي :

$$\begin{pmatrix} ١٠ \\ ١٦ \\ ١٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{pmatrix}^{١-} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$$

وللتوصل لقيم المجاهيل س ، ص ، ع نقوم بالآتي :

أولاً : نوجد مقلوب مصفوفة المعاملات ، وهي : $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$ **، حيث :**

١) نوجد قيمة محدد المصفوفة Δ بإستخدام العمود الأول ، حيث :

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} ٢ + \text{صفر} - \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} ١ = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = \Delta$$

= ١ (٠-٢) − صفر + ٢(٠ − ٣)

= -٢ − صفر − ٦ = $\boxed{٨-}$

٢) نوجد مصفوفة المرافقات ، حيث :

$$\begin{pmatrix} ٦- & ٤ & ٢- \\ ١- & ٢- & ١ \\ ٣ & ٢- & ٣- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}+ & \begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix}- & \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}+ \\ \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}- & \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix}+ & \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix}- \\ \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{vmatrix}+ & \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{vmatrix}- & \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}+ \end{pmatrix} = \text{مصفوفة المرافقات}$$

٣) نوجد معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} ٣- & ١ & ٢- \\ ٢- & ٢- & ٤ \\ ٣ & ١- & ٦- \end{pmatrix}$

٤) ∴ مقلوب مصفوفة المعاملات = $\frac{١}{٨-} \times \begin{pmatrix} ٣- & ١ & ٢- \\ ٢- & ٢- & ٤ \\ ٣ & ١- & ٦- \end{pmatrix}$

ثانياً : نطبق نموذج حل المعادلات باستخدام المصفوفات ، حيث :

$$\begin{pmatrix} ١٠ \\ ١٦ \\ ١٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{pmatrix}^{١-} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ١٠ \\ ١٦ \\ ١٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣- & ١ & ٢- \\ ٢- & ٢- & ٤ \\ ٣ & ١- & ٦- \end{pmatrix} \times \frac{١}{٨-} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} \therefore$$

$$\begin{pmatrix} ٥ \\ ٢ \\ ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٤٠-}{٨-} \\ \frac{١٦-}{٨-} \\ \frac{٤٠-}{٨-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (٣٦-١٦+٢٠-) \\ (٢٤-٣٢-٤٠) \\ (٣٦+١٦-٦٠-) \end{pmatrix} \times \frac{١}{٨-} = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} \therefore$$

∴ س = ٥　　، ص = ٢　　، ع = ٥

وعلى ذلك نجد أنه يجب إنتاج خمس وحدات من المنتج الأول ، ووحدتين من المنتج الثاني ، وخمس وحدات من المنتج الثالث ، وذلك حتى يمكن إستغلال طاقة مراكز الإنتاج الثلاث بالكامل ، أي حتى تعمل مراكز الإنتاج الثلاث بكامل طاقتها .

التطبيق الرابع :

الجمعية التعاونية للبترول لديها معملين أ ، ب لتكرير البترول ينـــتجون منـــتجات مشـــتركة بالنسب الموضحة لكل ساعة تشغيل على النحو التالي :

س	ص	
٣	٤	كيروسين بآلاف البراميل
٥	٢	بنزين بآلاف البراميل

فإذا كانت الكميات المطلوبة هى:

كيروسين	بنزين
٦٤	٣٤

والمطلوب :

تحديـــد عدد الساعات الواجب تشغيلها في المعملين أ ، ب مع بعضهما حتى يمكن إنتاج الطلب المذكور بدون أى زيادة فى الإنتاج ، وذلك :

(١) بإستخدام المحددات ؟ (٢) بإستخدام المحددات ؟

الحـــل :

بفرض أن عدد الساعات الواجب تشغيلها في المعملين هو س، ص على التوالـــي ، ومـــن هنا يمكن تلخيص المشكلة السابقة في صورة معادلتين كما يلي :

٣ س + ٤ ص = ١٧

٥ س + ٢ ص = ١٩

ولإيجاد س ، ص التي تمثل عدد الساعات الواجب تشغيلها في المعملين يتم حل المعادلتين السابقتين باستخدام المحددات أو المصفوفات كما يلي :

أولاً : باستخدام المحددات :

(١) محدد المعاملات $\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = (٣ \times ٢) - (٥ \times ٤)$

$= ٦ - ٢٠ = - ١٤$

(٢) محدد س: $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ١٧ & ٤ \\ ١٩ & ٢ \end{vmatrix} = (١٧ \times ٢) - (١٩ \times ٤)$

$= ٣٤ - ٧٦ = \boxed{-٤٢}$

(٣) محدد ص: $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٣ & ١٧ \\ ٥ & ١٩ \end{vmatrix} = (٣ \times ١٩) - (٥ \times ١٧)$

$= ٥٧ - ٨٥ = \boxed{-٢٨}$

$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-٤٢}{-١٤} = ٣$

$\therefore \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-٢٨}{-١٤} = ٢$

ثانياً : باستخدام المصفوفات :

يمكــن وضع المعادلتين المطلوب حلهما طبقاً لنموذج حل المعادلات بإستخدام المصفوفات على النحو التالى :

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} ١٧ \\ ١٩ \end{pmatrix}$$

وللتوصل لقيم المجاهيل س ، ص باستخدام النموذج السابق نقوم بالآتي :

أولاً : نوجد مقلوب مصفوفة المعاملات ، وهي : $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، وذلك كما يلي :

١) توجد قيمة محدد مصفوفة المعاملات = $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٦ - ٢٠ = -١٤$

٢) نوجد مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} +|٢| & -|٥| \\ -|٤| & +|٣| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +٢ & -٥ \\ -٤ & +٣ \end{pmatrix}$

٣) نوجد معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$

٤) ∴ $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{-١٤} \times \begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$ = مقلوب مصفوفة المعاملات

ثانياً : نطبق نموذج حل المعادلات باستخدام المصفوفات ، حيث :

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}^{-١} \times \begin{pmatrix} ١٧ \\ ١٩ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{١}{-١٤} \times \begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١٧ \\ ١٩ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{-١٤} \times \begin{pmatrix} (٣٤-٧٦) \\ (-٨٥+٥٧) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-٤٢}{-١٤} \\ \frac{-٢٨}{-١٤} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$$

∴ س = ٣　　، ص = ٢

النتيجة :

وعلى ذلك نتبين أنه يجب تشغيل المعمل (أ) ثلاث وحدات زمنية ، وتشغيل المعمل (ب) وحدتين زمنيتين حتى يمكن إنتاج الطلب المذكور ٠

التطبيق الخامس :

تجري إحدى المحافظات الإنتخابات الدورية لثلاثة أحزاب سياسية وهي الحزب الوطني ، والحزب الجمهوري ، والحزب المستقل ، وتتكون تلك المحافظة من ٦ مراكز ، وكانت نسب تفضيل الناخبين لكل حزب بكل من هذه المراكز من واقع الخبرات الماضية كما يلي :

الحزب / المركز	١	٢	٣	٤	٥	٦
الوطني	٠,٣٠	٠,٤٠	٠,٣٥	٠,١٠	٠,٤٥	٠,٥٥
الجمهوري	٠,٣٠	٠,٢٥	٠,٤٥	٠,٥٠	٠,٢٥	٠,١٥
المستقل	٠,٤٠	٠,٣٥	٠,٢٠	٠,٤٠	٠,٣٠	٠,٣٠

فإذا علمت أن أعداد الناخبين المتوقعة بكل مركز هي على التوالي في المراكز الست :

٤٠٠٠ ، ٦٠٠٠ ، ٣٠٠٠ ، ٧٠٠٠ ، ٥٠٠٠ ، ٤٥٠٠

والمطلوب:

تحديد النتيجة المتوقعة للإنتخابات باستخدام المصفوفات ؟.

الحــل :

يمكــن الحصــول علــى النتــيجة المتوقعة للإنتخابات بضرب نسب تفضيل الناخبيــن لكل حزب × أعداد الناخبين المتوقعة بكل مركز ، وباستخدام المصــفوفات حــتى يمكــن الضــرب يــتم وضع نسب تفضيل الناخبين كمصــفوفة أولـــى من الدرجة (٣×٦) ووضع أعداد الناخبين كمصفوفة ثانـــية من الدرجة (٦×١) ، وذلك حتى يكون عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية .

النتيجة المتوقعة للإنتخابات=

$$\begin{pmatrix} ٠,٣٠ & ٠,٤٠ & ٠,٣٥ & ٠,١٠ & ٠,٤٥ & ٠,٥٥ \\ ٠,٣٠ & ٠,٢٥ & ٠,٤٥ & ٠,٥٠ & ٠,٢٥ & ٠,١٥ \\ ٠,٤٠ & ٠,٣٥ & ٠,٢٠ & ٠,٤٠ & ٠,٣٠ & ٠,٣٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٤٠٠٠٠ \\ ٦٠٠٠٠ \\ ٣٠٠٠٠ \\ ٧٠٠٠٠ \\ ٥٠٠٠٠ \\ ٤٥٠٠٠ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ١٠٠٧٥ \\ ٩٤٧٥ \\ ٩٩٥٠ \end{pmatrix}$$

وعلى ذلك يتضح أن المتوقع هو فوز الحزب الأول في الترتيب وهو الحزب الوطني بأكبر الأصوات ٠

التطبيق السادس:

ينتج أحد مصانع لعب الأطفال أربعة أنواع من اللعب البلاستيكية وهي : طائرات ، سيارات ، عرائس ، مكعبات ٠ وكانت إحتياجات اللعبة الواحدة من مستلزمات إنتاج المختلفة كما يلي :

اللعبة / المستلزمات	طائرات	سيارات	عرائس	مكعبات
مواد خام	٦	٥	٥	٣
عمل	٦	٤	٥	٤
عناصر ثابتة	٢٠	١٠	١٥	١٠

فإذا علمت أن سعر الوحدة بالجنيه من مستلزمات الإنتاج:٣ ، ٥ ، ٢ ، على الترتيب ، وكان سعر بيع اللعبة الواحدة بالجنيه من كل نوع هي :

١٠٠ ، ٧٥ ، ٨٠ ، ٦٠ على الترتيب ، ومن ناحية أخرى كان حجم الطلب على منتجات المصنع من كل لعبة هو : ١٥٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، ٢٥٠ على الترتيب .

والمطلوب : تحديد صافي ربح المصنع من بيع الكميات السابقة من اللعب باستخدام المصفوفات ؟.

الحـــل :

ربح المصنع = الإيرادات – التكاليف

حيث :

- الإيرادات = الكميات المباعة × سعر بيع الوحدة

$$= [١٥٠\quad ٢٠٠\quad ٣٠٠\quad ٢٥٠] \times \begin{pmatrix} ١٠٠ \\ ٧٥ \\ ٨٠ \\ ٦٠ \end{pmatrix} = [٦٩٠٠٠]$$ جنيه .

وحيث أن :

تكلفة إنتاج الوحدة =

= أسعار مستلزمات الإنتاج × إحتياجات الوحدة من المستلزمات

$$= [٣\quad ٥\quad ٢] \times \begin{pmatrix} ٦ & ٥ & ٥ & ٣ \\ ٦ & ٤ & ٥ & ٤ \\ ٢٠ & ١٠ & ١٥ & ١٠ \end{pmatrix}$$

$$= [٨٨\quad ٥٥\quad ٧٠\quad ٤٩]$$

- التكاليف = الكمية المنتجة × تكلفة إنتاج الوحدة

وحيث أن :

الكميات المنتجة هي : [١٥٠ ٢٠٠ ٣٠٠ ٢٥٠]

تكلفة إنتاج الوحدة هي : [٨٨ ٥٥ ٧٠ ٤٩]

فإن :

$$\text{التكاليف} = \begin{bmatrix} ١٥٠ & ٢٠٠ & ٣٠٠ & ٢٥٠ \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} ٨٨ \\ ٥٥ \\ ٧٠ \\ ٤٩ \end{pmatrix} = [\ ٥٧٤٥٠\ ]\ \text{جنيه}$$

وعلى ذلك يكون :

الربح = الإيراد − التكاليف

= [٦٩٠٠٠] − [٥٧٤٥٠] = [١١٥٥٠] جنيه

التطبيق السابع :

فــيما يلى بيان بمبيعات شركة من شركات الأدوية عن ثلاثة أصناف من بعض الأدوية :

الصنف / الفرع	بنسلين	فلورست	زادتين
المنصورة	١٥٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠	٤٠٠٠٠٠
دمياط	٨٠٠٠٠	٢٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠

وكان سعر العبوة من كل نوع على الترتيب بوحدة النقود :

$$(١٠ \quad ٣٠ \quad ١٥)$$

والمطلوب :

إيجــاد قــيمة مبــيعات الشركة من كل نوع فى كل محافظة بإستخدام المصفوفات ؟.

الحـــل :

لإيجـــاد قـــيمة مبيعات الشركة من كل نوع فى كل محافظة بإستخدام المصـــفوفات نضـــع أثمـــان العـــبوات علـــى شكل متجه عمودي ونضربه فى المصفوفة الممثلة لأرقام المبيعات ينتج المطلوب على النحو التالي :

∴ مبيعات الشركة في محافظتي المنصورة ودمياط =

$$= \begin{pmatrix} ١٥٠٠٠٠٠ & ٣٠٠٠٠٠ & ٤٠٠٠٠٠ \\ ٨٠٠٠٠ & ٢٠٠٠٠٠ & ٣٠٠٠٠٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٣٠ \\ ١٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (١٥٠٠٠٠٠+٩٠٠٠٠٠٠+٦٠٠٠٠٠٠) \\ (٨٠٠٠٠٠+٦٠٠٠٠٠٠+٤٥٠٠٠٠٠) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٦٥٠٠٠٠٠ \\ ١١٣٠٠٠٠٠ \end{pmatrix}$$

أى أن :

قيمة مبيعات محافظة المنصورة = ١٦٥٠٠٠٠٠ جنيه

قيمة مبيعات محافظة دمياط = ١١٣٠٠٠٠٠ جنيه

التطبيق الثامن :

بفرض أن العلاقة بين العرض (ع) والسعر (س) علاقة خطية تحددها المعادلة : س = أ + ب ع

حيث :

أ : قيمة س عند ع = صفر

ب : معدل التغير فى السعر عندما يتغير العرض بمقدار وحدة واحدة.

وقــد أمكــن التعبــير عــن البــيانات الممثلة للسعر والعرض عند سبعة مستويات مختلفة للعرض وكانت النتائج كما يلي :

٧ أ + ٦٣ ب = ٤٥

٦٣ أ + ٦٥٥ ب = ٤٧٢

والمطلــوب إستخدام المصفوفات فى إيجاد قيمة كل من أ ، ب ومن ثم أوجد المعادلة التى تحدد العلاقة بين السعر والعرض ؟.

الحــل :

يمكــن وضع المعادلتيْن المطلوب حلهما طبقاً لنموذج حل المعادلات بإستخدام المصفوفات على النحو التالى :

$$\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٦٣ \\ ٦٣ & ٦٥٥ \end{pmatrix}^{-١} \times \begin{pmatrix} ٤٥ \\ ٤٧٢ \end{pmatrix}$$

وللتوصل لقيم المجاهيل أ ، ب باستخدام النموذج السابق نقوم بالآتي :

أولاً : نوجد مقلوب مصفوفة المعاملات ، وهي : $\begin{pmatrix} ٧ & ٦٣ \\ ٦٣ & ٦٥٥ \end{pmatrix}$ ، حيث :

١) توجد قيمة محدد مصفوفة المعاملات = $\begin{vmatrix} ٧ & ٦٣ \\ ٦٣ & ٦٥٥ \end{vmatrix}$

= ٤٥٨٥ − ٣٩٦٩ = ٦١٦

٢) مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} +|٦٥٥| & -|٦٣| \\ -|٦٣| & +|٧| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +٦٥٥ & -٦٣ \\ -٦٣ & +٧ \end{pmatrix}$

٣) معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} +٦٥٥ & -٦٣ \\ -٦٣ & +٧ \end{pmatrix}$

٤) $\therefore \begin{pmatrix} ٧ & ٦٣ \\ ٦٣ & ٦٥٥ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{٦١٦} \times \begin{pmatrix} +٦٥٥ & -٦٣ \\ -٦٣ & +٧ \end{pmatrix}$

ثانياً : نطبق نموذج حل المعادلات باستخدام المصفوفات ، حيث :

$$\begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٦٣ \\ ٦٣ & ٦٥٥ \end{pmatrix}^{-١} \times \begin{pmatrix} ٤٥ \\ ٤٧٢ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \frac{١}{٦١٦} \times \begin{pmatrix} +٦٥٥ & -٦٣ \\ -٦٣ & +٧ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٤٥ \\ ٤٧٢ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{١}{٦١٦} \begin{pmatrix} ٢٩٤٧٥ - ٢٩٧٣٦ \\ -٢٨٣٥ + ٢٣٠٤ \end{pmatrix} = \frac{١}{٦١٦} \begin{pmatrix} -٢٦١ \\ ٤٦٩ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ أ $= \frac{-٢٦١}{٦١٦} = -٠,٤$ ، ب $= \frac{٤٦٩}{٦١٦} = ٠,٧٦$

$\therefore$ **المعادلة التى تحدد العلاقة بين السعر والعرض هى:**

س = أ + ب ع

$\therefore$ س = -٠,٤ + ٠,٧٦ ع

<u>**التطبيق التاسع :**</u>

تنتج شركة إيديال ثلاثة أنواع من الثلاجات أحجام ١٠ ، ١٢ ، ١٤ قدم وفيما يلى كمية الأنتاج الشهرى عن شهر يناير ٢٠٠١م :

٣٠٠٠٠ ثلاجة	**١٠ قدم**
٥٠٠٠٠ ثلاجة	**١٢ قدم**
٤٠٠٠٠ ثلاجة	**١٤ قدم**

وإذا علم أن الثلاجات يلزم لإنتاجها نوعين من المواد الخام أ ، ب لكل نوع من الثلاجات على شكل المصفوفة التالية بالطن :

$$\begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ ١٠ & ٣٠ \\ ٣٠ & ٥٠ \\ ٢٠ & ٤٠ \end{pmatrix}$$

فالمطلوب :

تحديد كمية المواد الخام اللازمة لمواجهة الإنتاج الشهرى بالطن.

الحـــل :

لتحديد كمية المواد الخام اللازمة لمواجهة الإنتاج الشهرى بالطن يتم ضـــرب كميات الإنتاج من الأنواع المختلفة من الثلاجات في إحتياجات الإنتاج للمواد الخام ، ولتطبيق نظام المصفوفات في تقدير الإحتياجات من المواد الخام يـــتم صياغة هذه المشكلة في صورة المصفوفات بوضع عدد الوحدات المنتجة على شكل متجه أفقى وضربه في مصفوفة المواد الخام كما يلي :

كمية المواد الخام اللازمة =

$$\begin{bmatrix} ١٠ & ٣٠ \\ ٣٠ & ٥٠ \\ ٢٠ & ٤٠ \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} ٤٠٠٠٠ & ٥٠٠٠٠ & ٣٠٠٠٠ \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ٨٠٠٠٠٠+١٥٠٠٠٠٠+٣٠٠٠٠٠ & ١٦٠٠٠٠٠+٢٥٠٠٠٠٠+٩٠٠٠٠٠ \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ٢٦٠٠٠٠٠ & ٥٠٠٠٠٠٠ \end{pmatrix} =$$

أى أنه يلزم لتحقيق الطلب على الإنتاج ٥٠٠٠٠٠٠ وحدة من المادة الخام أ ، ٢٦٠٠٠٠٠ وحدة من المادة الخام ب .

التطبيق الثامن :

مصـــنع يقوم بإنتاج منتج معين بإستخدام ثلاثة مواد خام هي س ، ص ، ع ، وكانــت احتــياجات المصــنع مــن تلــك المواد بآلاف الوحدات يمكن تمثيلها بالمصفوفة التالية:

س ع ص

أ* = [٢٠ ١٥ ١٢]

وكانت تكلفة الوحدة الواحدة بالجنيه من كل مادة خام كما هو موضح بالمصفوفة التالية :

ب* = س [٥]
ص [٦]
ع [٤]

والمطلوب :

حساب التكلفة الكلية للمواد الخام المطلوبة للإنتاج ؟

الحــل :

يمكن حساب التكلفة الإجمالية للمواد الخام من خلال ضرب الرقم الأول فى المصفوفة أ* بالرقم الأول بالمصفوفة ب* وكذلك تم ضرب الرقم الثانى للمصفوفة أ* بالرقم الثانى بالمصفوفة ب* وكذلك تم ضرب الرقم الثالث بالمصفوفة أ* بنظيره الرقم الثالث فى المصفوفة ب* وبجمع نواتج الضرب الثلاث نحصل على التكلفة الإجمالية للمواد الخام المطلوبة للإنتاج .

ويمكن حساب التكلفة الإجمالية للمواد الخام من خلال ضرب المصفوفتين أ* و ب* ، ولكي يمكن إجراء عملية الضرب فلابد من وضع مصفوفة الصف الواحد (المتجه الصفى) على الشمال ومصفوفة المتجه العمودى على اليمين ٠

∴ التكلفة الإجمالية للمواد الخام = أ* × ب*

$$= \begin{bmatrix} ٢٠ & ١٥ & ١٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

$$= [(٢٠\times٥)+(١٥\times٦)+(١٢\times٤)]$$

= [٢٣٨] ألف جنيه ٠

التطبيق الحادي عشر :

شـــركة لصـــناعة التليفزيون تنتج ثلاث موديلات من أجهزة التليفزيون (أ ، ب ، ج) وهي في سبيل ذلك تحتاج لنوعين من المواد الخام (س ، ص) ، وكـــل موديـــل له ثلاث مقاسات حسب حجم الجهاز (١٨ ، ٢٠ ، ٢٤ بوصة)، فإذا كانت إحتياجات الشركة من المواد الخام (س ، ص) بمئات الوحدات خلال العام أمكن تمثيلها في المصفوفتين التاليتين :

موديل

		أ	ب	ج
س =	١٨ بوصة	٤	٢	٤
	٢٠ بوصة	٣	٤	٣
	٢٤ بوصة	٥	٤	٣

موديل

ص =		أ	ب	ج
١٨	بوصة	٥	٣	٣
٢٠	بوصة	٣	٢	٢
٢٤	بوصة	٢	٤	١

والمطلوب حساب إجمالي إحتياجات الشركة من وحدات المواد الخام ؟

الحـــل :

لحســـاب إجمالـــي إجمالي إحتياجات الشركة من وحدات المواد الخام يتم جمع مصفوفتي المواد الخام السابقتين ، وعلى ذلك يكون إجمالي إحتياجات الشركة من المواد الخام بمئات الوحدات هو :

إجمالي الإحتياجات =

٤	٢	٤
٣	٤	٣
٥	٤	٣

\+

٥	٣	٣
٣	٢	٢
٢	٤	١

موديل

∴ إجمالي الإحتياجات =

		أ	ب	ج
١٨	بوصة	٩٠٠	٥٠٠	٧٠٠
٢٠	بوصة	٦٠٠	٦٠٠	٥٠٠
٢٤	بوصة	٧٠٠	٨٠٠	٤٠٠

تمارين الفصل الرابع

(١) سلعتان غذائيتان ، تعطي السلعة الأولى ٦ سعر حراري وبها ٨ وحدات فيتامين ، وتعطي السلعة الثانية ٤ سعر حراري وبها ١٢ وحـدات فيتامين ، فإذا علمت أن شخص ما يحتاج يومياً إلى ٣٦ سـعر حراري وإلى ٤٨ وحدة فيتامين ، المطلوب تحديد التوليفة المثلى من السلعتيْن لتحقيق المطلوب لهذا الشخص ، وذلك :

١. باستخدام المحددات ٠

٢. باستخدام المصفوفات ٠

(٢) فـي مجـتمع مـا ، بفرض أن آليات السوق يمكن تلخيصها في دالتيْ الطلب والعرض التاليتيْن :

ط = ٨ − ٠,٧ س

ع = −١٥ + ١٣ س

حيـث (ط) تمثل الكمية المطلوبة ، (ع) تمثل الكمية المعروضة ، (س) تمـثل سـعر الوحـدة للمجموعة السلعية موضع الدراسة ، والمطلـوب تحديـد الكمية والسعر اللذان يحققان التوازن بفرض تحقق شروط المنافسة الكاملة في الدولة محل الدراسة ، وذلك :

١. باستخدام المحددات ٠

٢. باستخدام المصفوفات ٠

(٣) في التمرين السابق أوجد كمية وسعر التوازن الجديديْن إذا :

١. تم فرض ضريبة إضافية مقدارها جنيه واحد على وحدة السلعة

٢. منح دعم قدره جنيه واحد لكل وحدة سلعة

(٤) يقوم أحد عنابر شركة الحديد والصلب بإنتاج نوعين من المنتجات النهائية س ، ص تحتاج الوحدة الواحدة من المنتج (س) إلى ٤ ساعات عمل على الآلة الأولى وإلى ٢ ساعة عمل على الآلة الثانية بينما تحتاج الوحدة الواحدة من المنتج (ص) إلى ٦ ساعات عمل على الآلة الأولى وإلى ٨ ساعات عمل على الآلة الثانية ، فإذا كانت الطاقة الإنتاجية لهذا العنبر هي ٣٠٠ ساعة عمل لكل آلة من الآلتين ، المطلوب إيجاد عدد الوحدات اللازم إنتاجها من المنتجين حتى يمكن إستغلال طاقة العنبر بالكامل وذلك :

١. باستخدام المحددات .

٢. باستخدام المصفوفات .

(٥) مصنع الطوب الطفلي بمدينة الحوامدية يعمل به ٣ آلات بصفة رئيسية (أ ، ب ، جـ) وينتجون منتجات مشتركة بالكميات الموضحة فيما يلي :

	أ	ب	جـ
طوب أحمر عادة (بالألف)	٣	٢	١
طوب أحمر فاخر (بالألف)	٢	١	١
طوب أبيض فاخر (بالألف)	٥	٣	ـــ

فإذا كانت الكميات الشهرية المطلوبة من المصنع هي كما يلي :

١٠٠٠ طوب أحمر عادة (بالألف)

٧٠٠ طوب أحمر فاخر (بالألف)

١٠٠٠ طوب أبيض فاخر (بالألف)

المطلوب تحديد عدد الساعات الشهرية الواجب تشغيلها في كل قسم من الأقسام الثلاث حتى يمكن أن يوفي المصنع بالكميات المطلوبة بالكامل باستخدام المصفوفات ؟.

(٦) إذا علمت أن الدخل القومي في دولة ما يساوي مجموعة الإنفاق الإستهلاكي والحكومي والإستثماري ، وأن الإنفاق الإستهلاكي يعتبر دالة خطية في مستوى الدخل القومي كما يلي :

ق = ٢ + ٠,١ خ

حيث :

ق : يمثل الإنفاق الإستهلاكي بالمليار جنيه ٠

خ : يمثل قيمة الدخل القومي بالمليار جنيه ٠

وإذا فرض أن الإنفاق الحكومي يبلغ ١,٥ مليار جنيه ، وأن الإنفاق الإستثماري يبلغ ٣,٥ مليار جنيه ، المطلوب إيجاد مستويات التوازن لكل من قيم الدخل القومي والإنفاق الإستهلاكي وذلك :

١. باستخدام المحددات ٠

٢. باستخدام المصفوفات ٠

(٧) شركة جمال إبراهيم مهدي لصناعة المعدات الكهربية بها قسمان للإنتاج وأن التكاليف التي تم رصدها لهذه الأقسام هي : ٣٠٠ جنيه ، ٤٠٠ جنيه على الترتيب ، وبالإضافة لهذه التكاليف فإن كل قسم من القسمين يُحمل بجزء من تكاليف القسم الآخر وفقاً لما يلي :

القسم الأول يتحمل بنسبة ٤٠٪ من مجموع تكاليف القسم الثاني

القسم الثاني يتحمل بنسبة ٢٠٪ من مجموع تكاليف القسم الأول

والمطلوب تحديد إجمالى تكاليف كل قسم ، وذلك باستخدام كل من المحددات والمصفوفات ؟٠

(٨) مصنع ينتج نوعين من السلع هما س ، ص بحيث تحتاج الوحدة من المنتج س إلى ٤ ساعات فى المركز الأول و ٥ ساعات فى المركز الثاني. أما المنتج ص تحتاج الوحدة منه إلى ٢ ساعه فى المركز الأول ٣ ساعات فى المركز الثانى. إستخدم المحددات في تحديد عدد الوحدات اللازم إنتاجها من النوعين إذا كانت طاقة المركز الأول ٥٦ ساعات والمركز الثاني ٧٤ ساعة ؟

(٩) إذا كان من المعلوم أن الإستهلاك (ك) والإدخار (ر) هما دالتين فى الدخل (س) وأن ك + ر = س

وإذا كان فى ظل وضع إقتصادى فى دولة ما

ك = ١٠٠ + ٠,٥ س

ر = ٥٠ + ٠,٣٥ س

المطلوب إيجاد نقطة التوازن لـ ك، ر، س باستخدام كل من المحددات والمصفوفات ؟.

(١٠) شركة أشرف المهدي لنقل البضائع بالسيارات لديها ثلاثة أنواع من السيارات (اسكانيا – مرسيدس – نصر) فإذا كانت الشركة تقوم بنقل ثلاثة أنواع من البضائع أ، ب، جـ بإستخدام السيارات المختلفة. فتستطيع السيارة إسكانيا نقل وحدة واحدة من (أ) ووحدتين من كل من (ب)، (جـ).

وتستطيع السيارة مرسيدس نقل وحدتين من (أ) ووحدة واحدة من كل من (ب)، (جـ).

وتستطيع السيارة نصر نقل وحدة واحدة من كل من (أ)، (جـ) فقط.

فكم رحلة تقوم بها السيارة من كل نوع لنقل:

عدد ١٢ وحدة من (أ) ، عدد ١٠ وحدات من (ب) ، عدد ١٦ وحدة من (جـ) إذاعلم أن كل سيارة تسير كاملة الحمولة.

وذلك :

١. باستخدام المحددات •

٢. باستخدام المصفوفات •

(١١) شركة النصر للبترول لديها معملين أ ، ب لتكرير البنزين ينتجون منتجات مشتركة بالنسب الموضحة لكل ساعة تشغيل:

س	ص	
٤	٥	بنزين عادة بآلاف البراميل
٣	٢	بنزين سوبر بآلاف البراميل

وبفرض أن الكميات المطلوبة هى:

بنزين عادة	بنزين سوبر
٦٤	٣٤

المطلوب تحديد عدد الساعات الواجب تشغيلها فى المعملين أ ، ب مع بعضهما حتى يمكن إنتاج الطلب المذكور بدون أى زيادة فى الإنتاج :

وذلك :

١. باستخدام المحددات •

٢. باستخدام المصفوفات •

(١٢) إذا كانت دالتى الطلب والعرض على سلعة معينة هما

كـ ط = ١٠ - ع

كـ ض = -٢ + ٢ ع

حيث كـ ط الكمية المطلوبة ، كـ ض الكمية المعروضة ، ع =السعر فأوجد سعر التوازن والكمية التى يحدث عندها التوازن (ع ، كـ).

وإذا فرضت ضريبة مقدارها ٢ وحدة على وحدة السلعة. فأوجد بإستخدام المحددات سعر التوازن (ع) والكمية التى يحدث عندها التوازن (كـ) فى هذه الحالة والضريبة الكلية التى تحصلها الحكومة.

وكذلك إذا فرض أن الحكومة تعطى دعماً قدره ١ وحدة نقد على وحدة المنتج.

فأوجد أيضاً سعر التوازن والكمية التى يحدث عندها التوازن ومقدار الدعم الذى تعطيه الحكومة.

وذلك :

١. باستخدام المحددات .

٢. باستخدام المصفوفات .

(١٣) مصنع لإنتاج الأحذية بالمنصورة لديه ٣ أرقام لإنتاج الأحذية الرجالى والحريمى والأطفال .

وفيما يلى بيان بعدد ساعات إنتاج الزوج الواحد من الأحذية فى كل قسم من أقسام الإنتاج :

	الرجالى	الحريمى	الأطفال
القسم الأول	٣	٢	١
القسم الثانى	٢	١	١
القسم الثالث	٥	٣	صفر

فإذا علمت الطاقة الإنتاجية لكل قسم من الأقسام الثلاثة هى :

القسم الأول ١٠٠٠ ساعة

القسم الثانى ٧٠٠ ساعة

القسم الثالث ١١٠٠ ساعة

والمطلوب إيجاد مستويات الإنتاج من كل نوع من الأنواع الثلاثة للأحذيــة التى ينبغى للمصنع إنتاجها حتى تستغل الطاقة الإنتاجية المتاحة للإنتاج ، وذلك :

١. باستخدام المحددات •

٢. باستخدام المصفوفات •

(١٤) مصنع لإنتاج إطارات السيارات به ٣ أقسام للإنتاج طاقاتها الإنتاجية كما يلي :

القسم الأول ٩٠ ساعة عمل •

القسم الثاني ٦٠ ساعة عمل •

القسم الثالث ٨٠ ساعة عمل •

فإذا علمت أن المصنع ينتج ٣ أنواع من الإطارات ، وكانت إحتياجات الوحدة الواحدة من كل نوع محددة بالشكل التالي :

	القسم الأول	القسم الأول	القسم الأول
النوع الأول	٢	١	٣
النوع الثاني	٣	٢	١
النوع الثالث	١	٣	٢

فإذا كانت ربحية كل نوع من الأنواع الثلاث هى:

ربحية النوع الأول ١٠ جنيه .

ربحية النوع الثاني ١٥ جنيه .

ربحية النوع الثالث ٢٥ جنيه .

والمطلوب:تحديد ربح المصنع إذا كان المصنع يرغب في تشغيل الطاقة الإنتاجية للمصنع بالكامل ؟.

(١٥) مصنع ينتج ٣ أنواع من الصوف (القمر والشمس والنجوم) وتحتاج الوحدة الواحدة من كل نوع إلى عناصر الإنتاج (صوف وخيوط صناعية ومواد صباغة وعمال) على النحو التالى:

نوع الصوف	صوف	خيوط المواد	مواد الطباعة	عمال
القمر	١٠	٤	٥	٧
الشمس	٧	٣	٤	٥
النجوم	٥	٢	٣	٤

وكانت كميات الإنتاج المطلوبة هى:

٨٠٠ القمر ١٥٠٠ الشمس ٢٠٠٠ النجوم

وكان سعر الوحدة من عناصر الإنتاج هو:

٨ صوف ٢ مواد صلبة ٣ خيوط ٥ عمل

والمطلوب:

١- تحديد عدد الكميات الكلية من الصوف والخيوط الصناعية ومواد الصباغة والعمال.

٢- إيجاد تكاليف إنتاج الوحدة.

٣- إيجاد التكاليف الكلية للإنتاج وذلك بإستخدام المصفوفات.

(١٦) شركة محمد جمال لصناعة المعدات الكهربية بها ٣ أقسام للإنتاج وأن التكاليف التي تم رصدها لهذه الأقسام هي : ٣٠٠ جنيه ، ٤٠٠ جنيه ، ٥٠٠ جنيه على الترتيب ، وبالإضافة لهذه التكاليف فإن كل قسم من الأقسام الثلاث يُحمل بجزء من تكاليف الأقسام الأخرى وفقاً لما يلي :

القسم الأول يتحمل بنسبة ٤٠٪ من مجموع تكاليف القسم الثاني ، ٣٠٪ من مجموع تكاليف القسم الثالث ٠

القسم الثاني يتحمل بنسبة ٢٠٪ من مجموع تكاليف القسم الأول ، ١٠٪ من مجموع تكاليف القسم الثالث

القسم الثالث يتحمل بنسبة ١٥٪ من مجموع تكاليف القسم الأول ، ٢٥٪ من مجموع تكاليف القسم الثاني

والمطلوب تحديد إجمالى تكاليف كل قسم ، وذلك باستخدام كل من المحددات والمصفوفات ؟٠

(١٧) إذا كان عدد الآلات فى أقسام أحد المصانع كالآتى:

القسم	أ	ب	جـ	د
العدد	٥٠٠	٤٠٠	٣٠٠	٢٠٠

وكان إحتمال توقف الآلات فى الأقسام المختلفة هو على التوالى:

(٠,٠٣ ، ٠,٠٥ ، ٠,٠٢ ، ٠,٠١)

أوجد بإستخدام المصفوفات عدد الآلات المحتمل تشغيلها فى لحظة ما.

(١٨) يقوم مصنع بإنتاج نوعين من السلع أ ، ب تحتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول إلى ست ساعات عمل لعملية الطلاء وإلى أربع ساعات عمل لعملية التغليف بينما تحتاج الوحدة الواحدة من النوع الثانى إلى سبع ساعات عمل أيضاً لعملية الطلاء وإلى ثمانية ساعات عمل لعملية التغليف.

والمطلوب إيجاد عدد الوحدات الممكن إنجازها فى عمليتى الطلاء والتغليف فى ظل وجود ٢٠٠ ساعة عمل للطلاء وإلى ثمانية ساعات عمل للتغليف وذلك بإستخدام كل من المحددات والمصفوفات.

(١٩) بفرض تحقق شروط المنافسة الكاملة فى مجتمع إقتصادى ما حيث يتحدد فيه السعر بالنسبة للوحدة من سلعة ما على أساس العرض والطلب ، وكانت دالتى الطلب والعرض هما:

كـ ط = ١٢ - ٢,٢٥ ص

كـ ع = ٩ ص - ١٨

حيث كـ ط = كمية الطلب ، كـ ع = كمية العرض ، ص تمثل سعر الوحدة أوجد نقطة التعادل بين السعر والكمية بإستخدام المصفوفات ثم فى حالة إذا فرضت ضريبة إضافية مقدارها ١

جنيه على الوحدة من السلعة ، أوجد نقطة التعادل الجديدة بإستخدام المصفوفات والضريبة الكلية التىتحصلها الحكومة.

(٢٠) تقـوم الشـركة المصرية للملابس الجاهزة بإنتاج ثلاثة أنواع من البدل الجاهزه ، وتستخدم في إنتاج هذه المنتجات ثلاثة أقسام إنتاجية ، بحيث :

الـنوع الأول يتكلف ٣ جنيه في القسم الأول ، ٢ جنيه في القسم الثاني ، ١ جنيه في القسم الثالث ٠

النوع الثاني يتكلف ٥ جنيه في القسم الأول ، ٣ جنيه في القسم الثاني ، ٢ جنيه في القسم الثالث ٠

النوع الثالث يتكلف ٧ جنيه في القسم الأول ، ٥ جنيه في القسم الثاني ، ٣ جنيه في القسم الثالث ٠

فإذا كانت التكاليف الإجمالية للأقسام الثلاث على الترتيب هي ١٤٥ ، ٩٥ ، ٥٥ جنيه على الترتيب ٠

المطلوب :

تحديـد عـدد الوحدات التي يتم إنتاجها في ظل القيود السابقة ، وتحديد التكاليف الإجمالية ، وذلك :

١. باستخدام المحددات ٠

٢. باستخدام المصفوفات ٠

الفصل الخامس

تحليل المدخلات والمخرجات

(نموذج المنتج والمستخدم)

- مقدمة .
- مفهوم نموذج المنتج والمستخدم .
- نموذج المنتج والمستخدم لقطاعين .
- نموذج المنتج والمستخدم لثلاث قطاعات .

(٥-١) مقدمة

يُستخدم تحليل المنتج والمستخدم (تحليل المدخلات والمخرجات *Input - output Analysis*) في توضيح التداخل بين أنشطة قطاعات النظام المختلفة ، حيث تتم العملية الإنتاجية على المستوى القومى من خلال نشاط مجموعة من القطاعات ، حيث يقوم كل قطاع بإنتاج سلعة أو مجموعة من السلع المتجانسة مستخدماً فى عملياته الإنتاجية سلعاً من منتجات القطاعات الأخرى علاوة على إستخدامه سلعاً من إنتاجه نفسه .

وعلى ذلك فإن كل قطاع يقوم بتصريف إنتاجه إما عن طريق بيعه كمادة خام للقطاعات الأخرى أو للقطاع نفسه ، أو عن طريق بيعه كسلعة للمستهلك أو الحكومة أو القطاع الخارجي تلبية للطلب النهائى على ذلك المنتج أو تلك السلعة .

وعلى ذلك فمن الملاحظ وجود تداخل بين قطاعات وفروع النشاط الإقتصادى فى المجتمع ، قطاع معين يتم إنتاجه عن طريق إستخدام منتجات بعض القطاعات الأخرى كعناصر إنتاج أو سلع وسيطة وفى نفس الوقت قد يستخدم هذا المنتج كعنصر إنتاج أو سلع وسيطة للقطاعات الأخرى وهذا يعبر عنه بعلاقات التبعية الإقتصادية والفنية المتداخلة. وهذا ما يعبر عنه رياضياً بإسم مصفوفة التشابك القطاعى والتى عن طريقها يمكن الحصول على مصفوفة المعاملات الفنية.

ويقوم نموذج تحليل المدخلات - المخرجات أو ما يُسمى نموذج المنتج والمستخدم *Input - output Analysi* على أساس تعادل المخرجات الكلية مع المدخلات الكلية ، ومن هنا يتم افتراض أن منتجات كل قطاع تنقسم إلى قسمين رئيسيين هما :

١. مخرجات تُستخدم كمنتج نهائي (للإستهلاك أو للتصدير) وتُسمى بالطلب النهائي.

٢. مخرجات تُستخدم كمدخلات وسيطة للقطاع نفسه وللقطاعات الأخرى .

ولتوضيح فكرة تحليل المنتج والمستخدم ، نفترض أن البيانات التالية تمثل مصفوفة التحويلات (مصفوفة التشابك القطاعي لإقتصاد ما يتكون من ثلاث قطاعات (س) ، (ص) ، (ع) :

قطاعات مستهلكة / قطاعات منتجة	س	ص	ع	الطلب النهائي	الإنتاج الكلى (جملة المخرجات)
س	١٠٠	٣٠٠	١٠٠	٥٠٠	١٠٠٠
ص	١٠٠	٢٠٠	٥٠٠	١٢٠٠	٢٠٠٠
ع	٥٠	٢٥٠	١٠٠	٦٠٠	١٠٠٠

ومن الجدول السابق يمكن النظر لكل قطاع من زاويتين :

<u>الأولى</u> بوصفه قطاع منتج يمد نفسه والقطاعات الأخرى ببعض المدخلات ، وتمثل الصفوف الطريقة التى من خلالها يتم إستخدام ناتج كل قطاع أى مخرجاته ، فجزء من هذا الناتج يتم إستخدامه كسلعة وسيطة تدخل فى قطاعات أخرى والباقى يمثل الطلب النهائى على منتجات هذا القطاع .

<u>فمثلاً</u> يقوم القطاع (س) بتصريف إنتاجه الكلي (إجمالى مخرجاته) وقيمته ١٠٠٠ وحدة نقدية كما يلي :

- إستخدام ما قيمته ١٠٠ وحدة نقدية كمادة خام لإنتاجه الخاص (أي لإنتاج القطاع (س)٠
- بيع ما قيمته ٣٠٠ وحدة نقدية إلى القطاع (ص)٠
- بيع ما قيمته ٥٠٠ وحدة نقدية لتلبية الطلب النهائي على إنتاجه ٠

ويمكننا بنفس الأسلوب تحليل إنتاج القطاعين الآخرين (ص ، ع) فيما يتعلق بإنتاج كل منهما وكيفية تصريفه٠

الثانية وتتمثل في أن كل قطاع يلزمه مدخلات من القطاعات الأخرى ومن القطاع نفسه لكي يمارس العملية الإنتاجية ، وتمثل الأعمدة مدخلات القطاع من القطاعات المختلفة بما فى ذلك القطاع نفسه ٠

فمثلاً :

☒ بلغ إجمالي إنتاج القطاع (س) ١٠٠٠ وحدة نقدية وقد ساهم في تحقيق هذا الإنتاج ما يلي (وهو ما يُطلق عليه المدخلات أو المستخدم) :

- القطاع (س) نفسه ساهم بما قيمته ١٠٠ وحدة نقدية ٠
- القطاع (ص) ساهم بما قيمته ١٠٠ وحدة نقدية ٠
- القطاع (ص) ساهم بما قيمته ٥٠ وحدة نقدية ٠

وفي ضوء ما تقدم يمكننا تحديد نسبة مساهمة كل قطاع في تحقيق إجمالي إنتاج القطاع (س) على النحو التالي :

- نسبة مساهمة القطاع (س) = $\frac{١٠٠}{١٠٠٠}$ = ٠,١ وحدة ٠
- نسبة مساهمة القطاع (ص) = $\frac{١٠٠}{١٠٠٠}$ = ٠,١ وحدة ٠
- نسبة مساهمة القطاع (ع) = $\frac{٥٠}{١٠٠٠}$ = ٠,٠٥ وحدة ٠

وتُسمى كل من النسب السابقة بمعامل الإستخدام (المعامل الفني) وبالمثل يمكننا توضيح وتفسير بيانات القطاعين الآخرين (ص ، ع)

مصفوفة المعاملات الفنية:

في ضوء ما تقدم يمكننا تكوين مصفوفة المعاملات الفنية التي تلخص احتياجات كل قطاع من باقي القطاعات لإنتاج وحدة واحدة فقط من إنتاجه ، أي أن مصفوفة المعاملات الفنية هي عبارة عن جدول يوضح المعاملات الفنية (أو معاملات الإستخدام) لكافة القطاعات الثلاث ، و تأخذ مصفوفة المعاملات الفنية الشكل التالي :

المستخدم \ المنتج	س	ص	ع
س	$\frac{١٠٠}{١٠٠٠}$	$\frac{٣٠٠}{٢٠٠٠}$	$\frac{١٠٠}{١٠٠٠}$
ص	$\frac{١٠٠}{١٠٠٠}$	$\frac{٢٠٠}{٢٠٠٠}$	$\frac{٥٠٠}{١٠٠٠}$
ع	$\frac{٥٠}{١٠٠٠}$	$\frac{٢٥٠}{٢٠٠٠}$	$\frac{١٠٠}{١٠٠٠}$

أي أن مصفوفة المعاملات الفنية تكون في الصورة التالية :

المستخدم ↓ \ المنتج ←	س	ص	ع
س	٠,١	٠,١٥	٠,١
ص	٠,١	٠,١	٠,٥
ع	٠,٠٥	٠,١٢٥	٠,١

ويُرمز لمصفوفة المعاملات الفنية بالرمز (A)

ويمكن تفسير بيانات مصفوفة المعاملات الفنية على النحو التالي :

☒ لإنتاج وحدة واحدة من منتجات القطاع (س) ، فإنه يُستخدم :

(٠,١) وحدة من (س) ، (٠,١) وحدة من (ص) ، (٠,٠٥) وحدة من (ع) •

☒ لإنتاج وحدة واحدة من منتجات القطاع (ص) ، فإنه يُستخدم :

(٠,١٥) وحدة من (س) ، (٠,١) وحدة من (ص) ، (٠,١٢٥) وحدة من (ع) •

☒ لإنتاج وحدة واحدة من منتجات القطاع (ع) ، فإنه يُستخدم :

(٠,١) وحدة من (س) ، (٠,٥) وحدة من (ص) ، (٠,١) وحدة من (ع) •

والأمثلة التالية توضح التطبيق العملي لأسلوب تحليل المدخلات - المخرجات •

مثال (١)

الجدول التالي يبين تحليل المدخلات والمخرجات لثلاث قطاعات في مجتمع ما وهي (س ، ص ، ع) :

قطاعات مستخدمة / قطاعات منتجة		المستخدم			الطلب النهائى	الإنتاج الكلى
		س	ص	ع		
المنتج	س	١٠	١٨	٨	٤	٤٠
	ص	٦	٦	١٨	٣٠	٦٠
	ع	٢٠	١٨	٢٠	٤٢	١٠٠

فإذا كان حجم الطلب النهائى على إنتاج كل قطاع في الفترة القادمة يساوي : س = ١٠ ، ص = ٤٠ ، ع = ٥٠

المطلوب :

١. ما هي الكميات الواجب إنتاجها من كل قطاع لتحقيق الطلب النهائي ؟

٢. ما هي التغيرات التي تطرأ على إنتاج القطاعات الثلاث إذا ما زاد الطلب النهائي على إنتاج القطاع الأول (س) بمقدار ٥ وحدات (أي أن الطلب النهائي على إنتاج القطاع (س) قد أصبح ١٥ وحدة بدلاً من ١٠ وحدات)

الحـــل :

لحل هذا المثال نقوم بالخطوات التالية :

١) إيجاد مصفوفة المعاملات الفنية (A) :

وذلك بقسمة مدخلات كل قطاع على مجموع مخرجاته .

$$\therefore A = \begin{pmatrix} \frac{10}{40} & \frac{18}{60} & \frac{8}{100} \\ \frac{6}{40} & \frac{6}{60} & \frac{18}{100} \\ \frac{20}{40} & \frac{18}{60} & \frac{20}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.30 & 0.08 \\ 0.15 & 0.10 & 0.18 \\ 0.50 & 0.30 & 0.20 \end{pmatrix}$$

٢) إيجاد مصفوفة ليونتيف $(I - A)$ ، حيث :

مصفوفة ليونتيف = مصفوفة الوحدة – مصفوفة المعاملات الفنية

$$\therefore (I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 & 0.30 & 0.08 \\ 0.15 & 0.10 & 0.18 \\ 0.50 & 0.30 & 0.20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.75 & -0.30 & -0.08 \\ -0.15 & 0.90 & -0.18 \\ -0.50 & -0.30 & 0.80 \end{pmatrix}$$

٣) إيجاد مقلوب مصفوفة ليونتيف $(I - A)^{-1}$:

وهنا يتم إستخدام خطوات إيجاد مقلوب المصفوفة السابق دراستها فنجد أن مقلوب مصفوفة ليونتيف هو :

$$\therefore (I - A)^{-1} = \frac{1}{0.3969} \begin{pmatrix} 0.666 & 0.264 & 0.126 \\ 0.210 & 0.560 & 0.147 \\ 0.495 & 0.375 & 0.630 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.68 & 0.66 & 0.32 \\ 0.53 & 1.41 & 0.37 \\ 1.25 & 0.94 & 0.159 \end{pmatrix}$$

٤) إيجاد متجه الإنتاج الكلى الجديد (جملة المخرجات) ، حيث :

متجه الإنتاج الكلى الجديد =

مقلوب مصفوفة ليونتيف × متجه الطلب النهائى الجديد

وعلى ذلك فإنه ، إذا كان حجم الطلب النهائى الجديد على إنتاج كل قطاع في الفترة القادمة هو : س = ١٠ ، ص = ٤٠ ، ع = ٥٠ فإن :

المطلوب الأول :

$$\text{متجه الإنتاج الكلى الجديد} = \begin{pmatrix} ١,٦٨ & ٠,٦٦ & ٠,٣٢ \\ ٠,٥٣ & ١,٤١ & ٠,٣٧ \\ ١,٢٥ & ٠,٩٤ & ٠,١٥٩ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٤٠ \\ ٥٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٥٩,٢ \\ ٨٠,٢ \\ ١٢٩,٦ \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} ٥٩ \\ ٨٠ \\ ١٣٠ \end{pmatrix}$$

وعلى ذلك ، فإن :

الكميات الواجب إنتاجها من كل قطاع من القطاعات الثلاث لتحقيق الطلب النهائي هي :

س	ص	ع
٥٩	٨٠	١٣٠

المطلوب الثاني :

لإيجاد المطلوب الثاني يتم ضرب مقلوب مصفوفة ليونتف × متجه التغير الذي حدث في الطلب النهائي ، وهو زيادة الطلب النهائي على إنتاج القطاع (س) بمقدار ٥ وحدات فقط ، أما بالنسبة للقطاعين الآخرين فنجد أن مقدار التغير يساوي صفر لعدم حدوث تغير في الطلب النهائي على إنتاجهما .

وعلى ذلك :

التغير في الإنتاج =

مقلوب مصفوفة ليونتف × متجه التغير في الطلب النهائي

$$\therefore \text{التغير في الإنتاج} = \begin{pmatrix} ١,٦٨ & ٠,٦٦ & ٠,٣٢ \\ ٠,٥٣ & ١,٤١ & ٠,٣٧ \\ ١,٢٥ & ٠,٩٤ & ٠,١٥٩ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} ٨ \\ ٣ \\ ٦ \end{pmatrix}$$

أي أن التغيرات التي تطرأ على إنتاج القطاعات الثلاث هي :

- أن القطاع (س) سيزيد من إنتاجه بمقدار (٨) وحدات
- وأن القطاع (ص) سيزيد من إنتاجه بمقدار (٣) وحدات
- أن القطاع (س) سيزيد من إنتاجه بمقدار (٦) وحدات

وبذلك يصبح متجة الإنتاج الكلي الجديد (بعد الزيادة) للقطاعات الثلاث كما يلي :

$$\text{متجه الإنتاج الكلى الجديد} = \begin{pmatrix} ٥٩ \\ ٨٠ \\ ١٣٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٨ \\ ٣ \\ ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦٧ \\ ٨٣ \\ ١٣٦ \end{pmatrix}$$

أي أنه لموجهة التغير الذي يطرأ على الطلب النهائي ، وبالتالي تكون المستويات الواردة في حالة توازن ، يجب أن يكون :

- الإنتاج الكلي (إجمالي المخرجات) للقطاع (س) = ٦٧ وحدة
- الإنتاج الكلي (إجمالي المخرجات) للقطاع (ص) = ٨٣ وحدة
- الإنتاج الكلي (إجمالي المخرجات) للقطاع (ع) = ١٣٦ وحدة

مثال (٢)

بفرض وجود مجتمع مكون من قطاعين للإنتاج (١) ، (٢) والجدول التالي يبين تحليل المدخلات والمخرجات للقطاعين :

قطاعات مستخدمة / قطاعات منتجة		المستخدم (١)	المستخدم (٢)	الطلب النهائى	الإنتاج الكلى
المنتج	(١)	٤	١٠	٣٦	٥٠
	(٢)	١٠	٥	٨٥	١٠٠

المطلوب :

إذا كان حجم الطلب النهائى فى الفترة القادمة لكل من القطاعين هو (٥٠ ، ١٠٠) ، فأوجد مستويات الإنتاج الجديدة ؟.

الحل :

لتقدير مستويات الإنتاج الجديدة وفقاً لنموذج تحليل المدخلات المخرجات نقوم نتبع نفس الخطوات السابقة كما يلي :

أولاً) إيجاد مصفوفة المعاملات الفنية :

ويتم إيجاد مصفوفة المعاملات الفنية بقسمة كل عنصر من عناصر المعاملات الفنية على مجموع كل عمود ، وذلك على النحو التالي :

$$\therefore A = \begin{pmatrix} \frac{4}{50} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{50} & \frac{5}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.08 & 0.1 \\ 0.2 & 0.05 \end{pmatrix}$$

ثانياً) إيجاد مصفوفة ليونتيف (I − A) ، حيث :

مصفوفة ليونتيف = مصفوفة الوحدة − مصفوفة المعاملات الفنية

$$\therefore (I - A) = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠,٠٨ & ٠,١ \\ ٠,٢ & ٠,٠٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٩٢ & -٠,١ \\ -٠,٢ & ٠,٩٥ \end{pmatrix}$$

ثالثاً) إيجاد مقلوب مصفوفة ليونتيف $(I - A)^{-1}$:

١) محدد المصفوفة= $\begin{vmatrix} ٠,٩٢ & -٠,١ \\ -٠,٢ & ٠,٩٥ \end{vmatrix}$ = ٠,٨٧٤ − ٠,٠٢ = ٠,٨٥٤

٢) مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} +|٠,٩٥| & -|-٠,٢| \\ -|-٠,١| & +|٠,٩٢| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٩٥ & ٠,٢ \\ ٠,١ & ٠,٩٢ \end{pmatrix}$

٣) مصفوفة المرافقات المبدلة = $\begin{pmatrix} ٠,٩٥ & ٠,١ \\ ٠,٢ & ٠,٩٢ \end{pmatrix}$

٤) $\therefore (I - A)^{-1} = \frac{١}{٠,٨٥٤} \times \begin{pmatrix} ٠,٩٥ & ٠,١ \\ ٠,٢ & ٠,٩٢ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ١,١١٢ & ٠,١١٧ \\ ٠,٢٣٤ & ١,٠٧٧ \end{pmatrix}$$

رابعاً) نوجد مستويات الإنتاج الجديدة :

$\therefore$ مستويات الإنتاج الجديدة = $\begin{pmatrix} ١,١١٢ & ٠,١١٧ \\ ٠,٢٣٤ & ١,٠٧٧ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥٠ \\ ١٠٠ \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} ٦٨ \\ ١٢٠ \end{pmatrix}$

وعلى ذلك ، فإن :

الكميات الواجب إنتاجها من كل قطاع من القطاعين لتحقيق الطلب النهائي هي :

(١)	(٢)
٦٨	١٢٠

مثال (٣)

في المثال السابق بفرض ثبات المعاملات الفني (A) ، المطلوب توضيح التغير الذي يطرأ على إنتاج كل من القطاعين إذا زاد الطلب النهائي على إنتاج القطاع الأول بمقدار (٢٠) وحدة ، وانخفض الطلب النهائي على إنتاج القطاع الثاني بمقدار (٤٠) وحدة ؟.

الحـــل :

مستوى الطلب النهائي الجديد على إنتاج القطاع الأول :

= ٥٠ + ٢٠ = ٧٠ وحدة

مستوى الطلب النهائي الجديد على إنتاج القطاع الثاني :

= ١٠٠-٤٠ = ٦٠ وحدة

∴ متجه الإنتاج الكلي الجديد = $\begin{pmatrix} ١,١١٢ & ٠,١١٧ \\ ٠,٢٣٤ & ١,٠٧٧ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٧٠ \\ ٦٠ \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} ٨٥ \\ ٨١ \end{pmatrix}$

∴ متجه التغير في الإنتاج = $\begin{pmatrix} ٨٥ \\ ٨١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٦٨ \\ ١٢٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٧ \\ -٣٩ \end{pmatrix}$

وهذا يعني :

أن زيادة الطلب النهائي على إنتاج القطاع الأول بمقدار (٢٠) وحدة ، وانخفاض الطلب النهائي على إنتاج القطاع الثاني بمقدار (٤٠) وحدة يؤدي في النهاية إلى :

- زيادة إنتاج القطاع الأول بمقدار (١٧) وحدة
- نقص إنتاج القطاع الثاني بمقدار (٣٩) وحدة

ملحوظة هامة :

يمكن إيجاد مقدار التغير في إنتاج القطاعيْن مباشرةً ، حيث :

مقدار التغير في الإنتاج =

مقلوب مصفوفة ليونتف × متجه التغير في الطلب النهائي

∴ التغير في الإنتاج $\begin{pmatrix} ١,١١٢ & ٠,١١٧ \\ ٠,٢٣٤ & ١,٠٧٧ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢٠ \\ -٤٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٧ \\ -٣٩ \end{pmatrix}$

مثال (٤)

بفرض أن إقتصاد دولة ما يتكون من ثلاث قطاعات (س ، ص ، ع)، وأن مصفوفة المعاملات الفنية (A) لتلك القطاعات كانت كما يلي :

المستخدم ↓ / المنتج ←	س	ص	ع
س	٠,٤	٠,١	٠,١
ص	٠,١	٠,٤	٠,١
ع	٠,١	٠,١	٠,٤

وبفرض أن المخططين في تلك الدولة يهدفون إلى تحقيق طلب نهائي على سلع القطاعات الثلاث بالمستويات التالية :

القطاع	س	ص	ع
الهدف	٧٠٠	٢١٠٠	١٤٠٠

المطلوب : إيجاد مستويات إنتاج القطاعات الثلاث التي تحقق هذه الأهداف؟.

الحـــل :

لحل هذا المثال نوجد مصفوفة ليونتيف ، ثم نوجد مقلوب مصفوفة ليونتيف ، وبضـــرب مقلوب مصفوفة ليونتيف في متجه الطلب النهائي المستهدف نحصل علـــى مســـتويات إنـــتاج القطاعـــات الثلاث اللازمة لتحقيق المستويات المستهدفة من الطلب النهائي ، وذلك على النحو التالي :

أولاً) إيجاد مصفوفة ليونتيف $(A - I)$:

$$\therefore (A - I) = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠,٤ & ٠,١ & ٠,١ \\ ٠,١ & ٠,٤ & ٠,١ \\ ٠,١ & ٠,١ & ٠,٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٠,٦ & -٠,١ & -٠,١ \\ -٠,١ & ٠,٦ & -٠,١ \\ -٠,١ & -٠,١ & ٠,٦ \end{pmatrix}$$

ثانياً) إيجاد مقلوب مصفوفة ليونتيف $(A - I)^{-1}$:

وبإستخدام خطوات إيجاد مقلوب المصفوفة السابق دراستها نجد أن مقلوب مصفوفة ليونتيف هو :

$$\therefore (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{٢٥}{١٤} & \frac{٥}{١٤} & \frac{٥}{١٤} \\ \frac{٥}{١٤} & \frac{٢٥}{١٤} & \frac{٥}{١٤} \\ \frac{٥}{١٤} & \frac{٥}{١٤} & \frac{٢٥}{١٤} \end{pmatrix}$$

وبضرب مقلوب مصفوفة ليونتيف هذا × متجه الطلب النهائي المستهدف نحصل على مستويات إنتاج القطاعات الثلاث المطلوبة :

ثالثاً) مستويات الإنتاج المطلوبة =

$$\begin{pmatrix} \frac{٢٥}{١٤} & \frac{٥}{١٤} & \frac{٥}{١٤} \\ \frac{٥}{١٤} & \frac{٢٥}{١٤} & \frac{٥}{١٤} \\ \frac{٥}{١٤} & \frac{٥}{١٤} & \frac{٢٥}{١٤} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٧٠٠ \\ ٢١٠٠ \\ ١٤٠٠ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢٥٠٠ \\ ٤٥٠٠ \\ ٣٥٠٠ \end{pmatrix}$$

وعلى ذلك ، فإن مستويات الإنتاج الكلي لكل قطاع من القطاعات الثلاث واللازمة لتحقيق الطلب النهائي المستهدف هي :

س	ص	ع
٢٥٠٠	٤٥٠٠	٣٥٠٠

مثال (٥)

تعمل مؤسسة النصر في قطاع إنتاج الطاقة من ثلاثة مصادر وهي الفحم والجازولين والكهرباء ، وبفرض أنه لإنتاج وحدة من الفحم يُستخدم وحدة واحدة من الجازولين ووحدة واحدة من الكهرباء ولا يُستخدم شئ من الفحم ، وكذلك لإنتاج وحدة من الجازولين يُستخدم ٠,٢ وحدة من الجازولين ،٠,٤ وحدة من الكهرباء ولا يُستخدم شئ من الفحم ، كما أنه لإنتاج وحدة من الكهرباء يُستخدم ٠,٢ وحدة من الفحم ، ٠,٤ وحدة من الجازولين ، و٠,٢ وحدة من الكهرباء ، فإذا كان الطلب النهائي على الطاقة هو ١٠٠ وحدة من كل مصدر ، فالمطلوب الكمية الواجب إنتاجها من كل مصدر لتحقيق الطلب النهائي ؟

الحـــل :

من بيانات المشكلة السابقة يتضح المعطيات تمثل إحتياجات إنتاج الوحدة الواحدة من كل مصدر ، ولذلك فهي تمثل مصفوفة المعاملات الفنية وهي :

المستخدم ↓ / المنتج ←	فحم	جازولين	كهرباء
فحم	٠	٠	٠,٢
جازولين	١	٠,٢	٠,٤
كهرباء	١	٠,٤	٠,٢

$$\therefore A = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠,٢ \\ ١ & ٠,٢ & ٠,٤ \\ ١ & ٠,٤ & ٠,٢ \end{pmatrix}$$

ولـــتحديد الكمـــية الواجب إنتاجها من كل مصدر لتحقيق الطلب النهائي نوجد مصفوفة ليونتيف ، ثم نوجد مقلوبها ، ثم نضرب هذا المقلوب في متجه الطلب النهائي المُعطى ٠

أولاً) إيجاد مصفوفة ليونتيف $(I - A)$:

$$\therefore (I - A) = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠,٢ \\ ١ & ٠,٢ & ٠,٤ \\ ١ & ٠,٤ & ٠,٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & -٠,٢ \\ -١ & ٠,٨ & -٠,٤ \\ -١ & -٠,٤ & ٠,٨ \end{pmatrix}$$

ثانياً) إيجاد مقلوب مصفوفة ليونتيف $(I - A)^{-1}$ ، حيث :

١) قيمة محدد المصفوفة : $\begin{vmatrix} ٠,٢- & ٠ & ١ \\ ٠,٤- & ٠,٨ & ١- \\ ٠,٨ & ٠,٤- & ١- \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} ٠,٨ & ١- \\ ٠,٤- & ١- \end{vmatrix} ٠,٢- \begin{vmatrix} ٠,٤- & ٠,٨ \\ ٠,٨ & ٠,٤- \end{vmatrix} ١ =$$

$$٠,٢٤ = (٠,٨ + ٠,٤)\ ٠,٢- (٠,١٦- ٠,٦٤)١ =$$

٢)مصفوفة المرافقات

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} ٠,٨ & ١- \\ ٠,٤- & ١- \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} ٠,٤- & ١- \\ ٠,٨ & ١- \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٠,٤- & ٠,٨ \\ ٠,٨ & ٠,٤- \end{vmatrix} + \\ \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٠,٤- & ١- \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٠,٢- & ١ \\ ٠,٨ & ١- \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} ٠,٢- & ٠ \\ ٠,٨ & ٠,٤- \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٠,٨ & ١- \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} ٠,٢- & ١ \\ ٠,٤- & ١- \end{vmatrix} - & \begin{vmatrix} ٠,٢- & ٠ \\ ٠,٤- & ٠,٨ \end{vmatrix} + \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} ١,٢ & ١,٢ & ٠,٤٨ \\ ٠,٤ & ٠,٦ & ٠,٠٨ \\ ٠,٨ & ٠,٦ & ٠,١٦ \end{pmatrix} =$$

٣) معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} ٠,١٦ & ٠,٠٨ & ٠,٤٨ \\ ٠,٦ & ٠,٦ & ١,٢ \\ ٠,٨ & ٠,٤ & ١,٢ \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} ٠,١٦ & ٠,٠٨ & ٠,٤٨ \\ ٠,٦ & ٠,٦ & ١,٢ \\ ٠,٨ & ٠,٤ & ١,٢ \end{pmatrix} \times \frac{١}{٠,٢٤} = (I - A)^{-1} \therefore$$

وبضرب مقلوب مصفوفة ليونتيف هذا × متجه الطلب النهائي نحصل على الكمية الواجب إنتاجها من كل مصدر لتحقيق الطلب النهائي.

∴ الكميات الواجب إنتاجها = $\frac{١}{٠,٢٤} \times \begin{pmatrix} ٠,٤٨ & ٠,٠٨ & ٠,١٦ \\ ١,٢ & ٠,٦ & ٠,٦ \\ ١,٢ & ٠,٤ & ٠,٨ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١٠٠ \\ ١٠٠ \\ ١٠٠ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٣٠٠ \\ ١٠٠٠ \\ ١٠٠٠ \end{pmatrix}$

أي أنـه لتحقـيق الطلـب النهائـي ، فإنـه يجـب إنتاج ٣٠٠ وحدة فحم ، ١٠٠٠ وحدة جازولين ، ١٠٠٠ وحدة من الكهرباء .

مثال (٦)

تنتج شركة جمال المهدي ثلاث منتجات هي (أ) ، (ب) ، (جـ) ، وكان مقلوب مصفوفة ليونتيف في الصورة التالية :

$\frac{١}{٠,٤٦٣} \begin{pmatrix} ٠,٧١ & ٠,١٣ & ٠,٣٣ \\ ٠,٢٩ & ٠,٦٤ & ٠,٢٠ \\ ٠,١٩ & ٠,١٠ & ٠,٦١ \end{pmatrix}$

والمطلوب :

(١) إيجاد جملة كل منتج إذا علمت أن الإستهلاك النهائي خارج المشروع على المنتجات أ ، ب ، جـ على التوالي هو :

أ	ب	جـ
١٠	٩	٣

(٢) تحديد أثر زيادة الطلب على الإستهلاك النهائى للمنتج (جـ) بمقدار ٥ وحدات ؟

الحـــل :

المطلوب الأول :

متجه جملة الإنتاج من المنتجات الثلاث قبل زيادة الطلب =

$$= \frac{١}{٠,٤٦٣} \begin{pmatrix} ٠,٧١ & ٠,١٣ & ٠,٣٣ \\ ٠,٢٩ & ٠,٦٤ & ٠,٢٠ \\ ٠,١٩ & ٠,١٠ & ٠,٦١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٩ \\ ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٠ \\ ٢٠ \\ ١٠ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} أ \\ ب \\ جـ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٠ \\ ٢٠ \\ ١٠ \end{pmatrix}$$

المطلوب الثاني :

متجه جملة الإنتاج من المنتجات الثلاث بعد زيادة الطلب =

$$= \frac{١}{٠,٤٦٣} \begin{pmatrix} ٠,٧١ & ٠,١٣ & ٠,٣٣ \\ ٠,٢٩ & ٠,٦٤ & ٠,٢٠ \\ ٠,١٩ & ٠,١٠ & ٠,٦١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٩ \\ ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٤ \\ ٢٢ \\ ١٧ \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} أ \\ ب \\ جـ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٤ \\ ٢٢ \\ ١٧ \end{pmatrix}$$

$\therefore$ **أثر التغير في الطلب النهائي** $= \begin{pmatrix} ٢٤ \\ ٢٢ \\ ١٧ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢٠ \\ ٢٠ \\ ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٢ \\ ٧ \end{pmatrix}$

أي أن :

زيادة الطلب على المنتج (جـ) بمقدار ٥ وحدات يحتاج إلى زيادة الإنتاج في المنتجات أ ، ب ، جـ بعدد من الوحدات قدره ٤ ، ٢ ، ٧ وحدات على التوالي .

ملحوظة هامة :

في هذا المثال يمكن إيجاد أثر زيادة الطلب مباشرةً كما يلي :

∴ الأثر = مقلوب مصفوفة ليونتف × متجه التغير في الطلب النهائي

$$= \frac{١}{٠,٤٦٣} \begin{pmatrix} ٠,٧١ & ٠,١٣ & ٠,٣٣ \\ ٠,٢٩ & ٠,٦٤ & ٠,٢٠ \\ ٠,١٩ & ٠,١٠ & ٠,٦١ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٢ \\ ٧ \end{pmatrix}$$

وهي نفس النتيجة.

مثال (٧)

بفرض الإقتصاد القومي لدولة ما مكون من قطاعين : قطاع الزراعة والصناعة ، وقطاع النقل ، وكان الإنتاج الكلي لكل من القطاعين مقدراً بملايين الجنيهات على النحو التالي :

قطاعات مستخدمة / قطاعات منتجة	الزراعة والصناعة	النقل	الطلب النهائى	إجمالي الإنتاج
الزراعة والصناعة	١٥	١٠	٥	٣٠
النقل	٨	٨	٤	٢٠

المطلوب :

١. إوجد تأثير زيادة الطلب النهائى على الزراعة والصناعة بمقدار مليون جنيه ؟.

٢. إوجد تأثير زيادة الطلب النهائى على النقل بمقدار مليون جنيه ؟.

الحـــل :

لتحقيق المطلوب في هذا المثال يجب أولاً إيجاد مقلوب مصفوفة ليونتيف كما يلي :

أولاً) إيجاد مصفوفة المعاملات الفنية A ، حيث :

$$\begin{pmatrix} ٠,٥ & ٠,٥ \\ ٠,٤ & ٠,٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١٠}{٢٠} & \frac{١٥}{٣٠} \\ \frac{٨}{٢٠} & \frac{٨}{٣٠} \end{pmatrix} = A \therefore$$

ثانياً) إيجاد مصفوفة ليونتيف (A−I) ، حيث :

$$\begin{pmatrix} ٠,٥- & ٠,٥ \\ ٠,٦ & ٠,٣- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٥ & ٠,٥ \\ ٠,٤ & ٠,٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} = (A - I) \therefore$$

ثالثاً) إيجاد مقلوب مصفوفة ليونتيف $(A-I)^{١-}$ حيث :

$$\begin{pmatrix} ٣,٣ & ٤ \\ ٣,٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٥ & ٠,٦ \\ ٠,٥ & ٠,٣ \end{pmatrix} \times \frac{١}{٠,١٥} = ^{١-}(A-I) \therefore \quad ٤)$$

<u>المطلوب الأول :</u>

متجه الإنتاج الكلي قبل زيادة الطلب = $\begin{pmatrix} ٣٣ \\ ٢٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣,٣ & ٤ \\ ٣,٣ & ٢ \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} ٣٣ \\ ٢٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} \therefore$$

∴ أثر زيادة الطلب النهائى على الزراعة والصناعة بمقدار مليون جنيه=

$$\begin{pmatrix} ٤ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣,٣ & ٤ \\ ٣,٣ & ٢ \end{pmatrix} =$$

∴ جملة الإنتاج بعد زيادة الطلب النهائى على الزراعة والصناعة بمقدار مليون جنيه = $\begin{pmatrix} ٣٧ \\ ٢٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣٣ \\ ٢٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$

المطلوب الثاني :

متجه الإنتاج الكلي قبل زيادة الطلب = $\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٣ \\ ٢٣ \end{pmatrix}$

∴ أثر زيادة الطلب النهائى على النقل بمقدار مليون جنيه =

$$= \begin{pmatrix} ٤ & ٣,٣ \\ ٢ & ٣,٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣,٣ \\ ٣,٣ \end{pmatrix}$$

∴ جملة الإنتاج بعد زيادة الطلب النهائى على النقل بمقدار مليون جنيه

$$= \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٣ \\ ٢٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣,٣ \\ ٣,٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٦,٣ \\ ٢٦,٣ \end{pmatrix}$$

مثال (٨)

أعطيت لك البيانات التالية الخاصة بمدخلات قطاعي الصناعة والزراعة :

- مصفوفة ليونتيف $(I-A)$ = $\begin{pmatrix} ٠,٤ & -٠,٢ \\ -٠,٣ & ٠,٥٥ \end{pmatrix}$

- الإستهلاك النهائي لمنتجات القطاعين هو (٨ ، ١٨) على التوالي.

والمطلوب بيان تأثير زيادة الطلب على استهلاك المنتجات الصناعية بمقدار ٧ وحدات ، وذلك على الإنتاج الكلي للقطاعين ؟

الحـــل :

لتحديد أثر زيادة الطلب النهائى على المنتجات الصناعية بمقدار ٧ وحدات على متجه الإنتاج الكلي للقطاعين ، نقوم بما يلي :

اولاً) إيجاد مقلوب مصفوفة ليونتيف $(A-I)^{-1}$ حيث :

$$(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} -٠,٢ & ٠,٤ \\ ٠,٥٥ & -٠,٣ \end{pmatrix}^{-1}$$

١) محدد المصفوفة = $\begin{vmatrix} -٠,٢ & ٠,٤ \\ ٠,٥٥ & -٠,٣ \end{vmatrix}$ = ٠,٢٢ − ٠,٠٦ = ٠,١٦

٢) مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} -|-٠,٣| & +|٠,٥٥| \\ +|٠,٤| & -|-٠,٢| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٣ & ٠,٥٥ \\ ٠,٤ & ٠,٢ \end{pmatrix}$

٣) معكوس مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} ٠,٢ & ٠,٥٥ \\ ٠,٤ & ٠,٣ \end{pmatrix}$

٤) $\therefore (A-I)^{-1} = \frac{١}{٠,١٦} \times \begin{pmatrix} ٠,٢ & ٠,٥٥ \\ ٠,٤ & ٠,٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١,٢٥ & ٣,٤ \\ ٢,٥ & ١,٩ \end{pmatrix}$

ثانياً) لتحقيق المطلوب :

متجه الإنتاج الكلي قبل زيادة الطلب = $\begin{pmatrix} ١,٢٥ & ٣,٤ \\ ٢,٥ & ١,٩ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٨ \\ ١٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥٠ \\ ٦٠ \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\begin{pmatrix} \text{الصناعة} \\ \text{الزراعة} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥٠ \\ ٦٠ \end{pmatrix}$

متجه الإنتاج الكلي بعد زيادة الطلب = $\begin{pmatrix} ١,٢٥ & ٣,٤ \\ ٢,٥ & ١,٩ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١٥ \\ ١٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧٤ \\ ٧٣ \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\begin{pmatrix} \text{الصناعة} \\ \text{الزراعة} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧٤ \\ ٧٣ \end{pmatrix}$

$\therefore$ أثر الزيادة على الإنتاج الكلي = $\begin{pmatrix} ٧٤ \\ ٧٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٥٠ \\ ٦٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٤ \\ ١٣ \end{pmatrix}$

مثال (٩)

بفــرض أن الإنتاج في قطاع الزراعة (س) والصناعة (ص) يتحدد على النحو التالي :

س= ٠,٠٨ س + ٠,١ ص + ٥٠

ص = ٠,٢ س + ٠,٠٥ ص + ١٠٠

حيــث يقــدم كــل مــن القطاعين أجزاءاً من إنتاجه كمستخدمات في كليهما ، ويُخصــص الجــزء المتبقــي لمقابلة الطلب النهائي ، والمطلوب تحديد حجم الإنتاج الكلي في كل من القطاعين ؟.

الحــل :

نستخلص من المعادلتين السابقتين أن :

- **مصفوفة المعاملات الفنية** $A = \begin{pmatrix} ٠,٠٨ & ٠,١ \\ ٠,٢ & ٠,٠٥ \end{pmatrix}$

- **متجه الطلب النهائي** $= \begin{pmatrix} ٥٠ \\ ١٠٠ \end{pmatrix}$

ولتحديد حجم الإنتاج الكلي في كل من القطاعين نقوم بما يلي :

أولاً) نوجد مصفوفة ليونتيف $(I - A)$ **، حيث :**

$$\therefore (I - A) = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠,٠٨ & ٠,١ \\ ٠,٢ & ٠,٠٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٩٢ & -٠,١ \\ -٠,٢ & ٠,٩٥ \end{pmatrix}$$

ثانياً) نوجد مقلوب مصفوفة ليونتيف $(I - A)^{-1}$ **، وهو كما سبق :**

$$\therefore (I - A)^{-1} = \frac{١}{٠,٨٥٤} \times \begin{pmatrix} ٠,٩٥ & ٠,١ \\ ٠,٢ & ٠,٩٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١,١١٢ & ٠,١١٧ \\ ٠,٢٣٤ & ١,٠٧٧ \end{pmatrix}$$

ثالثاً) نوجد مستويات الإنتاج المطلوبة :

$$\therefore \text{مستويات الإنتاج الجديدة} = \begin{pmatrix} ١,١١٢ & ٠,١١٧ \\ ٠,٢٣٤ & ١,٠٧٧ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٥٠ \\ ١٠٠ \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} ٦٨ \\ ١٢٠ \end{pmatrix}$$

وعلى ذلك ، فإن :

الكميات الواجب إنتاجها من كل قطاع من القطاعين لتحقيق الطلب النهائي هي :

(س)	(ص)
٦٨	١٢٠

مثال (١٠)

بفرض أن الإنتاج في قطاع الزراعة (س) والصناعة (ص) والتجارة (ع) يتحدد على النحو التالي :

س = ٠,٥ س + ٠,٢٥ ص + ٠,٢٥ ع + ٣٠

ص = ٠,٥ س + ٠,٢٥ ص + ٦٠

ع = ٠,٢٥ ص + ٠,٥ ع + ٩٠

حيث يقدم كل من القطاعات الثلاث أجزاءاً من إنتاجها كمستخدمات في كل منهم ، ويُخصص الجزء المتبقي لمقابلة الطلب النهائي ، والمطلوب تحديد حجم الإنتاج الكلي في كل من القطاعات الثلاث ؟.

الحل :

نستخلص من المعدلات السابقة أن :

- متجه الطلب النهائي = $\begin{pmatrix} ٣٠ \\ ٦٠ \\ ٩٠ \end{pmatrix}$

- مصفوفة المعاملات الفنية $A = \begin{pmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \\ ٠ & \frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & \frac{١}{٤} & ٠ \end{pmatrix}$

ولتحديد حجم الإنتاج الكلي في كل من القطاعات الثلاث نقوم بما يلي :

أولاً) نوجد مصفوفة ليونتيف $(A-I)$ ، حيث :

$$(A-I) = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \\ ٠ & \frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & \frac{١}{٤} & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{٤} & -\frac{١}{٤} & \frac{١}{٢} \\ ٠ & \frac{٣}{٤} & -\frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & -\frac{١}{٤} & ٠ \end{pmatrix}$$

ثانياً) إيجاد مقلوب مصفوفة ليونتيف $(A-I)^{-١}$ حيث :

١) محدد المصفوفة = $\frac{٣}{٣٢}$

٢) إيجاد مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} \frac{١}{٨} & \frac{١}{٤} & \frac{٣}{٨} \\ \frac{١}{٨} & \frac{١}{٤} & \frac{٣}{١٦} \\ \frac{١}{٤} & \frac{١}{٨} & \frac{٣}{١٦} \end{pmatrix}$

٣) إيجاد معكوس مصفوفة المرفقات= $\begin{pmatrix} \frac{٣}{١٦} & \frac{٣}{١٦} & \frac{٣}{٨} \\ \frac{١}{٨} & \frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} \\ \frac{١}{٤} & \frac{١}{٨} & \frac{١}{٨} \end{pmatrix}$

٤) $\therefore (A-I)^{-1} = \frac{٣٢}{٣}\begin{pmatrix} \frac{٣}{١٦} & \frac{٣}{١٦} & \frac{٣}{٨} \\ \frac{١}{٨} & \frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} \\ \frac{١}{٤} & \frac{١}{٨} & \frac{١}{٨} \end{pmatrix}$

وعلـــى ذلـــك يمكـــن إيجاد متجه الإنتاج الكلي الجديد من خلال ضرب مقلوب مصفوفة ليونيتف في متجه عمودي الطلب النهائي الجديد على النحو التالي :

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{٣٢}{٣}\begin{pmatrix} \frac{٣}{١٦} & \frac{٣}{١٦} & \frac{٣}{٨} \\ \frac{١}{٨} & \frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} \\ \frac{١}{٤} & \frac{١}{٨} & \frac{١}{٨} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣٠ \\ ٦٠ \\ ٩٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤٢٠ \\ ٣٦٠ \\ ٣٦٠ \end{pmatrix}$$

∴ الكميات اللازم إنتاجها في القطاعات الثلاث هي :

☒ حجم الإنتاج الكلي في قطاع الزراعة (س) = ٤٢٠ وحدة ٠

☒ حجم الإنتاج الكلي في قطاع الصناعة (ص) = ٣٦٠ وحدة ٠

☒ حجم الإنتاج الكلي في قطاع التجارة (ع) = ٣٦٠ وحدة ٠

مثال (١١)

إذا كانت مصفوفة المعاملات الفنية لإقتصاد مكون من ثلاث قطاعات في الصورة التالية :

$$\begin{pmatrix} \frac{٦}{٤٠} & \frac{٨}{٤٨} & \frac{٤}{٣٢} \\ \frac{١٠}{٤٠} & \frac{١٤}{٤٨} & \frac{١٠}{٣٢} \\ \frac{٨}{٤٠} & \frac{٤}{٤٨} & \frac{٦}{٣٢} \end{pmatrix}$$

وكان الطلب النهائي على منتجات القطاعات الثلاث هو : (١٤ ، ١٤ ، ٢٢) على التوالي ٠المطلوب إيجاد متجه عمودي المخرجات الكلية التي تحقق التوازن المطلوب؟٠

الحـــل :

لتحديد الكمية اللازم إنتاجها من كل قطاع نقوم بالآتي :

أولاً) إيجاد مصفوفة ليونتيف $(A-I)$، حيث :

$$\begin{pmatrix} \frac{٦}{٤٠} & \frac{٨}{٤٨} & \frac{٤}{٣٢} \\ \frac{١٠}{٤٠} & \frac{١٤}{٤٨} & \frac{١٠}{٣٢} \\ \frac{٨}{٤٠} & \frac{٤}{٤٨} & \frac{٦}{٣٢} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = (A-I)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{٣}{٢٠}- & \frac{١}{٦}- & \frac{٧}{٨} \\ \frac{١}{٤}- & \frac{١٧}{٢٤} & \frac{٥}{١٦}- \\ \frac{٤}{٥} & \frac{١}{١٢}- & \frac{٣}{١٦}- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٦}{٤٠}- & \frac{٨}{٤٨}- & \frac{٢٨}{٣٢} \\ \frac{١٠}{٤٠}- & \frac{٣٤}{٤٨} & \frac{١٠}{٣٢}- \\ \frac{٣٢}{٤٠} & \frac{٤}{٤٨}- & \frac{٦}{٣٢}- \end{pmatrix} =$$

ثانياً) إيجاد مقلوب مصفوفة ليونتيف $(A-I)^{-1}$ ، حيث:

١) محدد مصفوفة $= \Delta =$ $\begin{vmatrix} \frac{٣}{٢٠}- & \frac{١}{٦}- & \frac{٧}{٨} \\ \frac{١}{٤}- & \frac{١٧}{٢٤} & \frac{٥}{١٦}- \\ \frac{٤}{٥} & \frac{١}{١٢}- & \frac{٣}{١٦}- \end{vmatrix} =$ ٤٠٥ تقريباً ٠

٢) إيجاد مصفوفة المرافقات = $\begin{pmatrix} ٠,١٥٩ & ٠,٢٠٣- & ٠,٥٤٧ \\ ٠,١٠٤ & ٠,٦٧٢ & ٠,١٤٦- \\ ٠,٥٦٧ & ٠,٢٦٦ & ٠,١٤٨ \end{pmatrix}$

٣) إيجاد معكوس مصفوفة المرفقات = $\begin{pmatrix} ٠,١٤٨ & ٠,١٤٦- & ٠,٥٤٧ \\ ٠,٢٦٦ & ٠,٦٧٢ & ٠,٢٠٣- \\ ٠,٥٦٧ & ٠,١٠٤ & ٠,١٥٩ \end{pmatrix}$

د- ∴ $(A-I)^{-1} = \frac{١}{٤٠٥} \begin{pmatrix} ٠,١٤٨ & ٠,١٤٦- & ٠,٥٤٧ \\ ٠,٢٦٦ & ٠,٦٧٢ & ٠,٢٠٣- \\ ٠,٥٦٧ & ٠,١٠٤ & ٠,١٥٩ \end{pmatrix}$

وعلــى ذلــك يمكــن إيجاد متجه الإنتاج الكلي الجديد من خلال ضرب مقلوب مصفوفة ليونتيف في متجه عمودي الطلب النهائي على النحو التالي :

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٤٠٥} \begin{pmatrix} ٠,١٤٨ & ٠,١٤٦- & ٠,٥٤٧ \\ ٠,٢٦٦ & ٠,٦٧٢ & ٠,٢٠٣- \\ ٠,٥٦٧ & ٠,١٠٤ & ٠,١٥٩ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١٤ \\ ١٤ \\ ٢٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٢١,٩ \\ ٣٢,١٤ \\ ٣٩,٨٩ \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} ٢٢ \\ ٣٢ \\ ٤٠ \end{pmatrix}$

∴ الكميات اللازم إنتاجها في القطاعات الثلاث هي :

- ⊠ حجم الإنتاج الكلي في القطاع (س) = ٢٢ وحدة ٠
- ⊠ حجم الإنتاج الكلي في القطاع (ص) = ٣٢ وحدة ٠
- ⊠ حجم الإنتاج الكلي في القطاع (ع) = ٤٠ وحدة ٠

تمارين الفصل الخامس

(١) الجدول التالي يبين المعاملات الفنية للقطاعين (أ ، ب)

من \ إلى		المستخدم (أ)	المستخدم (ب)
المنتج	(أ)	٠,٢٠	٠,٣٠
	(ب)	٠,٦٠	٠,٢٠

☐ إذا كان حجم الطلب النهائى على إنتاج القطاعين (أ ، ب) هو (١٨٠٠ ، ١٢٠٠) على الترتيب ، فأوجد حجم الإنتاج الكلي لكل قطاع لتغطية الطلب النهائي على المنتج ؟.

☐ وإذا زاد الطلب النهائى على إنتاج القطاع (أ) بمقدار ٦٠٠ وحدة وانخفض الطلب النهائى على إنتاج القطاع (ب) بمقدار ٣٠٠ وحدة ، فما تأثير ذلك على إنتاج كل من القطاعين (إفترض ثبات المعاملات الفنية)

(٢) إذا كان حجم الإنتاج الكلي للقطاعات (أ ، ب ، جـ) هو (س ، ص ، ع) على الترتيب حيث يقدم كل من القطاعات الثلاث أجزاءاً من إنتاجها كمستخدمات في كل منهم ، ويُخصص الجزء المتبقي لمقابلة الطلب النهائي ، ويتحدد إنتاج القطاعات الثلاث على النحو التالي :

س = ٠,١٨ س + ٠,١٥ ص + ٠,٣٠ ع + ٤٠٠

ص = ٠,٢٦ س + ٠,٢٠ ص + ٠,٥٠ ع + ٣٠٠

ع = ٠,٢٠ س + ٠,٢٠ ص + ٠,٢٠ ع + ٢٠٠

المطلوب تحديد المستويات التوازنية في كل من القطاعات الثلاث ؟.

(٣) إذا كان حجم الإنتاج الكلي للقطاعات (أ ، ب ، جـ) هو (١٧٧٥٣٠ ، ١٢٧٣٧٠ ، ١٨٠٤١٠) وحدة على الترتيب ، وكان مقلوب مصفوفة ليونتيف على النحو التالي :

$$(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} ١,٠٢٠ & ٠,٨١٦ & ١,٨٣٧ \\ ٠,٩٣٩ & ٤,٥٥١ & ٠,٤٩٠ \\ ٢,١٦٣ & ٠,٥٣١ & ٠,٦٩٤ \end{pmatrix}$$

المطلوب تحديد حجم الطلب النهائي على إنتاج كل من القطاعات الثلاث ؟.

(٤) الجدول التالي يبين المنتج والمستخدم للقطاعات (أ ، ب ، جـ):

من \ إلى	(أ)	(ب)	(جـ)	إستهلاك محلي	صادرات	الإنتاج الكلي
(أ)	٣٦٠	٣٦٠	٤٨٠	٥٠٠	٣٠٠	٢٠٠٠
(ب)	٥٢٠	٤٨٠	٨٠٠	٤٠٠	٢٠٠	٢٤٠٠
(جـ)	٤٠٠	٤٨٠	٣٢٠	٣٠٠	١٠٠	١٦٠٠

والمطلوب :

- ❑ بين أن مستويات الإنتاج السابقة توازنية ؟
- ❑ وإذا كان من المخطط أن يضاعف كل قطاع من حجم صادراته ، فما هي التغيرات التي تطرأ على إنتاج القطاعات الثلاث حتى يمكن تحقيق ذلك (إفترض ثبات المعاملات الفنية) وفسر ما تصل إليه من نتائج ؟.

(٥) الجدول التالي يبين المدخلات والمخرجات للقطاعات (أ ، ب ، ج) المكونة للإقتصاد القومي لدولة ما:

مدخلات / مخرجات	(أ)	(ب)	(جـ)	الطلب النهائي	الإنتاج الكلي
(أ)	٥٠	٢٠	٤٠	٧٠	١٨٠
(ب)	٢٠	٣٠	٢٠	٩٠	١٦٠
(جـ)	٣٠	٢٠	٢٠	٥٠	١٢٠

والمطلوب :

- ☐ إيجاد متجه الإنتاج الكلي إذا تغير الطلب النهائي إلى :

أ	ب	ج
٧٠	١٠٠	٥٥

(٦) الجدول التالي يبين المنتج والمستخدم للقطاعات (أ ، ب ، جـ):

إلى / من	(أ)	(ب)	(جـ)	الطلب المحلي	الطلب الدولي
(أ)	٩٠	٣٠	٦٠	٥٠	٧٠
(ب)	٦٠	٣٠	٤٠	٢٠	٥٠
(جـ)	٣٠	٦٠	٤٠	٣٠	٤٠

والمطلوب :

- ☐ هل مستويات الإنتاج السابقة توازنية ؟

□ وإذا زاد الطلب الدولي على إنتاج القطاعيْن (أ ، ب) بمقدار (١٠ ، ٢٠) على التوالي ، فما هي التغيرات التي تطرأ على إنتاج القطاعات الثلاث حتى يمكن تحقيق ذلك (إفترض ثبات المعاملات الفنية) ؟.

(٧) الجـدول التالي يبين المدخلات والمخرجات للقطاعات الثلاث المكونة للإقتصـاد القومـي لدولـة مـا وهي الزراعة (س) والصناعة (ص) والتجارة (ع):

قطاعات مستهلة / قطاعات منتجة	س	ص	ع	الطلب النهائي	الإنتاج الكلى (جملة المخرجات)
س	٨	٤	٨	٢٠	٤٠
ص	٤	٤	٤	٨	٢٠
ع	٤	٣٦	٨	٢٢	٤٠

والمطلوب:

١. مصفوفة المعاملات الفنية
٢. مصفوفة ليونتيف
٣. مقلوب مصفوفة ليونتيف
٤. أثر زيادة الطلب على الإستهلاك النهائى لقطاع الصناعة بمقدار وحدتين.

(٨) إذا كانت مصفوفة المعاملات الفنية فى قطاع ينتج ٣ سلع هى:

المنتج

المستخدم
$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠,٢ & ٠,٢ \\ ٠,١ & ٠,١ & ٠,٢ \\ ٠,١ & ٠,٢ & ٠ \end{bmatrix}$$

وكان الطلب النهائى على كل سلعة هو:

$$\begin{bmatrix} ١٠٠٠ \\ ٨٠٠ \\ ١٢٠٠ \end{bmatrix}$$

أوجد الكمية اللازم إنتاجها من كل سلعة.

(٩) الأتى بيان مصفوفة المدخلات والمخرجات لعملية إنتاجية تقوم على ثلاث قطاعات:

بيـــــان		مدخلات إلى القطاع			الطلب النهائي
		(١)	(٢)	(٣)	
مخرجات من قطاع	(١)	١٣٥	٢٠٠	٢٠٠	١٧٥
	(٢)	٩٠	١٥٠	٢٠٠	٦٠
	(٣)	٢٧٠	٢٠٠	٢٢٥	٢٠٥

وبفرض أن مصفوفة الطلب النهائى أصبحت : $\begin{pmatrix} ٥٠ \\ ٦٠ \\ ٢٠٠ \end{pmatrix}$

أوجد مصفوفة المخرجات الكلية التى تتفق مع التغير فى الطلب النهائى.

(١٠) إذا كان الإقتصاد القومي لدولة ما مقسماً إلى ثلاث قطاعات هى الزراعة والصناعة والنقل . وكان الإنتاج لكل قطاع (مقدراً بملايين الجنيهات) كالأتى:

قطاعات مستهلة / قطاعات منتجة	س	ص	ع	الطلب النهائي	الإنتاج الكلى (جملة المخرجات)
س	٨٠	١٠٠	١٠٠	٤٠	٣٢٠
ص	٨٠	٢٠٠	٦٠	٦٠	٤٠٠
ع	٨٠	١٠٠	١٠٠	٢٠	٣٠٠

أوجد متجه الإنتاج إذا تغير الطلب النهائى كالأتى:

الزراعة ١٢٠ الصناعة ٤٠ النقل ١٠

(١١) إذا كان الإقتصاد القومى لدولة ما مقسماً إلى قطاعين: قطاع الزراعة والصناعة وقطاع النقل ، وكان الإنتاج لكل قطاع مقدراً (بملايين الجنيهات) كالأتى:

قطاعات مستخدمة / قطاعات منتجة	الزراعة والصناعة	النقل	الطلب النهائى	إجمالي الإنتاج
الزراعة والصناعة	١٤	٦	٨	٢٨
النقل	٧	١٨	١١	٣٦

أوجد متجه إجمالى الإنتاج إذا تغير الطلب النهائى كالأتى:

الزراعة والصناعة : ١٦ النقل: ٣

(١٢) إذا كان مقلوب مصفوفة ليونتيف لأحد نماذج المدخلات والمخرجات على النحو التالي :

$$(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} ١,٦٠٥ & ٠,٣٥٧ & ٠,٧١٣ \\ ٠,٢٩٥ & ١,٣٣٦ & ٠,٣٨٦ \\ ٠,٣٦٦ & ٠,٢٧٢ & ١,٤٠١ \end{pmatrix}$$

وكان حجم الإنتاج الكلي للقطاعات الثلاث الممثلة للمجتمع هو (١٧٨ ، ١٨٨ ، ١٣٦) وحدة على الترتيب ، المطلوب تحديد حجم الطلب النهائي على إنتاج كل من القطاعات الثلاث ؟.

(١٣) الجدول التالي يبين المعاملات الفنية لقطاعين رئيسيين من قطاعات الإنتاج الزراعي في إحدى الدول وهما (أ ، ب)

من \ إلى		المستخدم	
		(أ)	(ب)
المنتج	(أ)	٠,٣	٠,٢٥
	(ب)	٠,٤	٠,٥

☐ إذا كان حجم الطلب المحلي على إنتاج القطاعين (أ ، ب) هو (٣٠٠ ، ٤٥٠) على الترتيب ، أما الطلب الدولي على إنتاج القطاعين (أ ، ب) هو (٢٠٠ ، ٣٥٠) على الترتيب فأوجد حجم الإنتاج الكلي لكل قطاع لتغطية كل من الطلب المحلي والدولي على المنتج ؟.

☐ وإذا زاد الطلب الدولي على إنتاج القطاع (أ) بمقدار ٣٠٠ وحدة وانخفض الطلب النهائى على إنتاج القطاع (ب) إلى ٣٠٠ وحدة ، فما تأثير ذلك على إنتاج كل من القطاعين (إفترض ثبات المعاملات الفنية)

الفصل السادس

البرمجة الخطية

- مقدمة.
- مجالات وخصائص البرمجه الخطيه .
- المتباينات (الغير متساويات) .
- العرض البياني للمتباينات الخطية .
- طرق حل مشاكل البرمجه الخطيه .
- الحل البياني لمشاكل البرمجة الخطية .
- تطبيقات عملية على البرمجة الخطية .

(٦-١) مقدمة

تعتبر البرامج الخطية وسيلة من وسائل التحليل الرياضي للمشكلات الإدارية والإقتصادية والتجارية بصفة عامة ٠

ويُقصد بكلمة " برمجه " لمشكلة تخصيص الموارد أنها سلسلة الإجراءات والقواعد الرياضيه التى تمكن من اختيار أفضل بديل من البدائل المتعدده لحل مشكلة تخصيص الموارد ، ويكون البديل الأفضل هو الحل الأمثل للمشكله ، ويُقصد " بالخطيه " وجود تناسب طردى فى العلاقات بين متغيرات المشكله ، بمعنى أنه إذا زادت قيمة أحد عناصر المدخلات بنسبه معينه ، فإن من المتوقع زيادة قيمة عناصر المخرجات بنفس النسبه ٠

ولقد أستخدمت كلمة *Programing* كأداه تهدف إلى استغلال الموارد المتاحة للمنشأة أو لأي وحدة (سواء كانت هذه الموارد بشرية – قوة عاملة– أو مواد أولية أو غيرها) بما يحقق النهاية العظمى لدوال مختلفة (كدالة الربح أو دالة الإنتاج) أو يحقق النهاية الصغرى (الدنيا) لدوال أخرى (كدالة التكاليف) وذلك في ظل القيود التي تتمثل في الموارد المحدودة ٠

**** بعض مجالات استخدام البرمجه الخطيه :**

ويُستخدم أسلوب البرامج الخطية في العديد من المجالات ، ومن تلك المجالات :

(١) مشاكل تحديد تشكيلة الإنتاج في ظل أن يكون لدى المنشأه قدر محدود من الموارد تتمثل فى طاقه إنتاجيه محدوده أو ساعات عمل محدوده ، أو مواد خام محدوده ٠

(٢) مشاكل إختيار تشكيلة الإستثمارات (حافظة الأوراق الماليه) التى تحقق أقل مخاطره وأكبر عائد ممكن ٠

(٣) مشاكل النقل فى حالة وجود مسافات بين مراكز الإنتاج ومنافذ التوزيع وفى هذه الحاله نكون فى حاجه إلى تحديد أي من المراكز الإنتاجيه يكون الأفضل لإرسال عدد من الوحدات المطلوبه لمنفذ توزيع معين دون غيره ، وذلك لتحقيق أدنى تكلفة نقل ممكنه ٠

(٤) تخطيط الإنتاج ، ومشكلات التغذية ، تخطيط العمل ، مشكلات الشراء ، مشكلات التصنيع ، وغير ذلك من المشكلات ٠

**** الخصائص الأساسيه للبرمجه الخطيه :**

(١) أن تكون هناك بدائل مختلفه قابله للقياس الكمى للوصول إلى الهدف ، فمثلاً ، مصنع ينتج عدة منتجات ، فما هى الإمكانيه لإنتاج واحد أو أكثر من هذه المنتجات؟٠

(٢) أن يكون هناك هدف مطلوب تحقيقه ، مثل تحقيق أقصى أرباح ممكنه ، أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن ٠

(٣) أن تكون الموارد محدوده ، بمعنى أنه إذا كان المصنع ينتج منتجات مختلفة وكان هناك عدد محدود من الساعات لتشغيل الآلات ٠

(٤) أن تكون هناك علاقه بين العوامل المتغيره ، فمثلاً إذا كان الربح = ١٠ جنيهات فى المنتج (أ) ، ١٥ جنيه فى المنتج (ب) ، فإن مجموع الربح يعكس النسبه بين المنتج (أ) ، والمنتج (ب) ٠

(٥) يمكن التعبير عن الهدف والقيود بمعادلات أو متباينات خطيه ، فإذا كان المصنع ينتج نوعين من المنتجات (س) ، (ص) ، وكان هامش الربح ١٠ جنيهات للنوع الأول ، ١٥ جنيه للنوع الثانى ، فإنه يمكن التعبير عن الهدف (الربح) بالمعادلة البسيطه التاليه :

الربح (ر) = ١٠ س + ١٥ ص

وإذا افترضنا أن لدينا منتجين (س ، ص) يتم تصنيعهما فى قسمين للإنتاج ، القسم الإنتاجى الأول لديه ٦٠ ساعه متاحه ، والقسم الإنتاجى الثانى لديه ٤٨ ساعه متاحه ، وأن تصنيع وحده واحده من المنتج (س) يحتاج إلى ٤ ساعات فى القسم الإنتاجى الأول ، وساعتين فى القسم الإنتاجى الثانى ، وتصنيع وحده واحده من المنتج (ص) يحتاج إلى ساعتين فى القسم الإنتاجى الأول ، ٤ ساعات فى القسم الإنتاجى الثانى ، أي أنه :

	القسم الإنتاجي الأول	القسم الإنتاجي الثانى
س	٤	٢
ص	٢	٤
	٦٠	٤٨

فيمكن التعبير عن هذه القيود بالمتباينتين التاليتين :

٤ س + ٢ ص ≤ ٦٠

٢ س + ٤ ص ≤ ٤٨

(٥) توافر شروط عدم السالبيه :

بمعنى أنه يجب أن تكون قيم كل متغيرات المشكله موجبه ، أي تساوى صفر أو أكبر من الصفر ، وبمعنى آخر يجب أن تكون كل الوحدات المنتجه موجبه لأنه لايمكن أن تنتج وحدات سالبه .

وحيث أن القيود التي تكون على المنشأة (المشكلة المطلوب حلها) في صورة متباينات من الناحية الرياضية ، نسوق فيما يلي مراجعة تذكيرية لأهم المفاهيم المتعلقة بالمتباينات الرياضية والتي سنحتاج إليها في دراستنا لموضوع البرمجة الخطية.

(٦-٢) المتباينات (الغيرمتساويات) :

هــي تعبــير عن العلاقات الترتيبية بين الأعداد الحقيقية ، ونلجأ إلى المتبايــنات إذا أردنــا الوصول إلى تقدير تقريبيلعلاقة معينة بدلاً من تحديدها تحديــداً دقــيقاً ، وأيضــاً في الحالات التي يُفضل فيها التقدير بفترة بدلاً من التقدير بنقطة .

فــإذا كان (أ ، ب) عددانحقيقيان ، فإن الرمز (أ > ب) يعني أن (أ) أكــبر من (ب) ، حيث (أ) الطرف الأيمن ، (ب) الطرف الأيسر للمتباينة ، كأن نقول أن (١٥ > ١٠)

ويمكــن إعــادة كــتابة نفــس المتباية بعد عكس إتجاهها (ب < أ) ويعني أن (ب) أقل من (أ) ، حيث تكون (ب) الطرف الأيمن ، (أ) الطرف الأيسر للمتباينة ، كأن نقول أن (١٠ < ١٥)

ويمكن تلخيص أهم قواعد المتباينات فيما يلي :

**** جمع وطرح المتباينات :**

(١) عــندما يضاف أو يطرح نفس الرقم الحقيقى إلى كل من طرفى المتباينة فإن إتجاه المتباينة يظل كما هو:

أى أن إذا كان (أ > ب) ، وكان (جـ) عدد حقيقى فإن:

⊠ أ + جـ > ب + جـ

⊠ أ - جـ > ب - جـ

فمثلاً : إذا كانت ٨ > ٥ علاقة حقيقية ، فإن :

⊠ ٨ + ٤ > ٥ + ٤ أي : ١٢ > ٩

⊠ ٨ - ٧ > ٥ - ٧ أي : ١ > -٢

(٢) يمكــن نقل أي جزء من أجزاء المتباينة من جانب إلى آخر من جوانب المتباينة بعد تغيير اشارته بدون التأثير على اتجاه المتباينة ، أي :

إذا كانت أ > ب + جـ فإن :

☒ أ – ب > جـ

☒ أ – جـ > ب.

فمثلاً : إذا كان : ٨ > ٥ + ٢ فإن ٨ – ٢ > ٥

فمثلاً : إذا كان : ٢س – ١ > س + ٤

∴ ٢س – س > ٤ + ١ أو : س > ٥

**** ضرب وقسمة المتباينات :**

(١) إذا ضــربنا كــلا مــن طرفيْ المتباينة في (أو قسمنا على) نفس العدد الموجــب ، فإن إتجــاه المتباينة لا يتغير ، أما إذا ضربنا طرفيْ المتباينة في (أو قســمنا علــى) نفــس العــدد الموجب ، فإن إتجــاه المتباينة يتغير إلى العكس ،

فمثلاً : إذا كان : ١٠ > ٨ ، فإن :

بضرب طرفيْ × ٢ ∴ ٢٠ > ١٦

بقسمة الطرفيْن ÷ ٢ ∴ $\frac{١٠}{٢} > \frac{٨}{٢}$ أي : ٥ > ٤

ولكن :

بضرب طرفيْ × – ٢ ∴ – ٢٠ < – ١٦

بقسمة الطرفيْن ÷ – ٢ ∴ $\frac{١٠}{-٢} < \frac{٨}{-٢}$ أي : – ٥ < – ٤

(٢) إيجاد مقلوب طرفيْ المتباينة يؤدي إلى تغير إتجاهها إلى العكس

فمثلاً : إذا كان : $\frac{٢}{٣} > \frac{١}{٤}$، فإن بإيجاد مقلوب الطرفيْن :

$\therefore \frac{٣}{٢} < \frac{٤}{١}$

(٣) إتجـــاه المتبايـــنة المكونـــة مـــن أعداد موجبة لا يتغير عند تربيع أو تكعيـــب أو ٠٠٠٠٠ كـــلا مـــن طرفيْ المتباينة ، وكذلك الحال عند أخذ الجذر الموجب لكل من الطرفيْن ٠

فمثلاً : إذا كان : ٩ > ٤، فإن :

- ☐ بتربيع الطرفيْن ∴ ٨١ > ١٦
- ☐ بتكعيب الطرفيْن ∴ ٧٢٩ > ٦٤

وهكذا ٠

- ☐ وبأخذ الجذر التربيعي : ∴ ٣ > ٢

المتباينات الخطية في مجهول واحد :

والصورة العامة للمتباينات الخطية في مجهول واحد هي :

- ○ أ + ب س ≤ جـ (ب ≺ صفر)
- ○ أ + ب س ≥ جـ (ب ≺ صفر)

وقيمة س التي تحقق المتباينة :

أ + ب س ≤ جـ ، هي : س ≤ $\frac{\text{جـ} - \text{أ}}{\text{ب}}$

وقيمة س التي تحقق المتباينة :

أ + ب س ≥ جـ ، هي : س ≥ $\frac{\text{جـ} - \text{أ}}{\text{ب}}$

مثـــال (١)

حل المتباينة التالية:

١٠ س + ٢ ≤ ٢٢

الحـــــل :

نـــنقل كـــل عنصر يحتوى على س فى طرف بينما تنقل الأرقام الثابتة للطرف الثانى من المتباينة ٠

∴ ١٠ س ≤ ٢٢ − ٢

∴ ١٠ س ≤ ٢٠

نقسم طرفيْ المتباينة على معامل (س) ، وعلى ذلك بالقسمة على (١٠) :

∴ س ≤ ٢

مثـــــال (٢)

حل المتباينة التالية:

− ٤ س + ٥ ≥ ١٧

الحـــــل :

نـــنقل كـــل عنصر يحتوى على س فى طرف بينما تنقل الأرقام الثابتة للطرف الثانى من المتباينة ٠

∴ − ٤ س ≥ ١٧ − ٥

∴ − ٤ س ≥ ١٢

نقسم طرفيْ المتباينة على معامل (س) ، وعلى ذلك بالقسمة على (− ٤) :

∴ س ≤ − ٣

(٦-٣) العرض البياني للمتباينات الخطية :

عـند تحديـد منطقة الحلول لمتباينة واحدة أو عدة متباينات معاً على الرسـم البياني ، نقوم بتحويل كل متباينة إلى معادلة ثم نعرض الخط المستقيم الممـثل للمعادلـة على الرسم البياني ، وبالتالي فإن الخط المستقيم هذا يقسم الفراغ إلى قسمين :

١. القسـم العلـوي أو الـذي على يمين الخط ، ويضم عدد لا نهائي من الـنقاط تحقـق كلهـا المتباينة (أكبر من) ويُسمى هذا القسم منطقة الحلول للمتباينة (أكبر من) .
٢. القسـم السـفلي أو الذي على يسار الخط ، ويضم عدد لا نهائي من الـنقاط تحقـق كلهـا المتباينة (أقل من) ويُسمى هذا القسم منطقة الحلول للمتباينة (أقل من) .

مثـال (٣)

أوجد منطقة الحلول للمتباينة التالية:

٤ س + ٢ ص ≤ ١٢

الحــل :

نحول المتباينة السابقة إلى معادلة :

∴ ٤ س + ٢ ص = ١٢

نرسم الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة على أساس فرض أن :

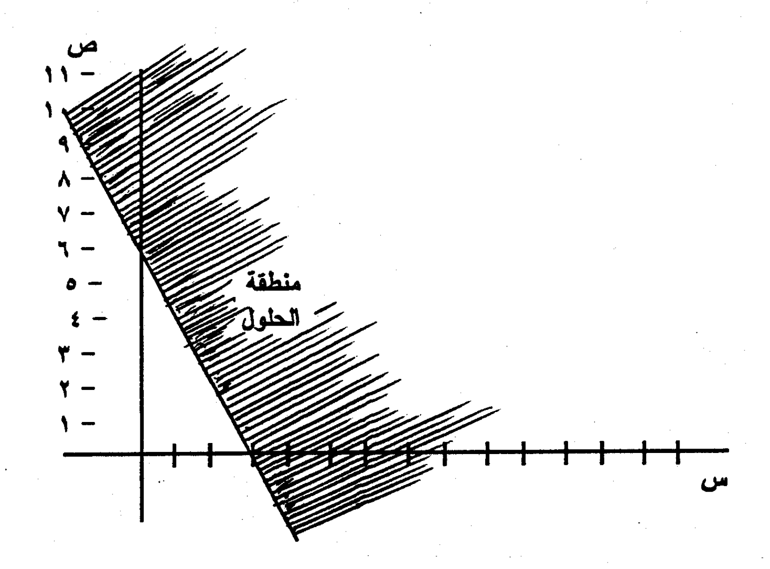
س = صفر ، وبالتالي : ص = $\frac{١٢}{٢}$ = ٦

ص = صفر ، وبالتالي : س = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣

ويمكن تلخيص هذه النتائج في الجدول التالي :

س	صفر	٣
ص	٦	صفر

وبرســم الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (صفر ، ٦) ، (٣ ، صفر)، نجد أن :



ومــن هــذا الشكل البياني ، ومن خلال قواعد المتباينات ، وحيث أن المتبايــنة في الصورة ≤ (أكبر من) ، فإن المنطقة التي تمثل حل للمتباينة هي المنطقة التي أعلى ويمين الخط المستقيم •

ومــن هــنا نجــد أن مــنطقة الحلول للمتباينة هي المنطقة المظللة لأعلى في الشكل السابق •

مثـــال (٤)

أوجد منطقة الحلول للمتباينة التالية:

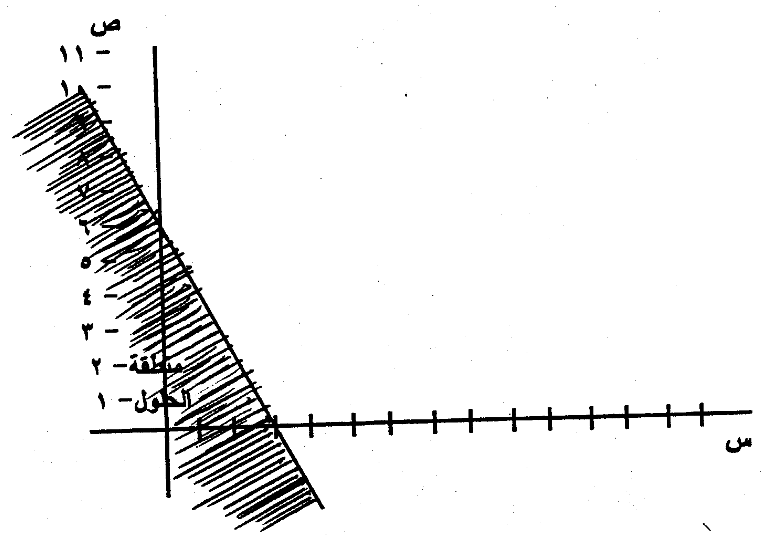
٤ س + ٢ ص ≥ ١٢

الحـــل :

نرسم الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة ، حيث كما سبق ، يكون :

س	صفر	٣
ص	٦	صفر

وبرسم الخط المستقيم الواصل الممثل للمعادلة ، نجد أن :



وحيـــث أن المتباينة في الصورة ≥ (أقل من) ، فإن المنطقة التي تمـــثل حـــل للمتباينة هي المنطقة التي أسفل ويسار الخط المستقيم ، كما في الشكل السابق .

مثـــال (٥)

أوجد منطقة الحلول للمتباينتين التاليتين :

٥ س + ٢ ص ≥ ١٠

٣ س + ٤ ص ≥ ١٢

الحـــــل :

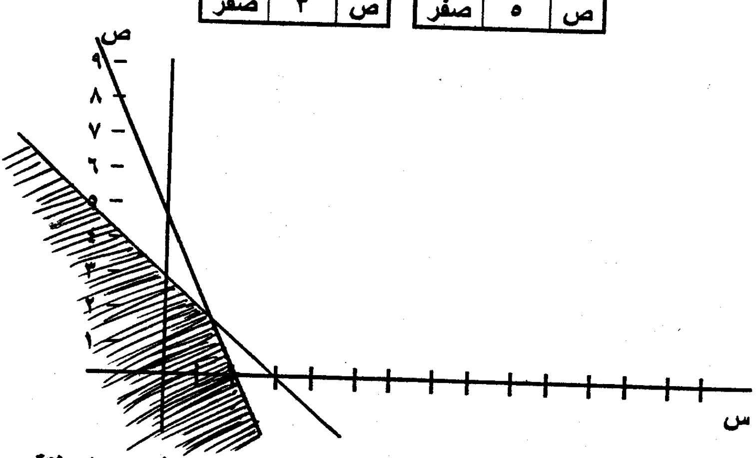
نحول المتباينات إلى معادلات :

∴ ٥ س + ٢ ص = ١٠ ، ٣ س + ٤ ص = ١٢

نرسم الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة الأولى والثانية ٠ حيث :

المعادلة الأولى		
س	صفر	٢
ص	٥	صفر

المعادلة الثانية		
س	صفر	٤
ص	٣	صفر



ومـــن هـــذا الشـــكل البياني ، نجد أن منطقة الحلول للمتباينتين هي المنطقة المظللة لأسفل في الشكل السابق ، لأن كل من المتباينتين في الصورة ≥ ٠

مثـــال (٦)

أوجد منطقة الحلول المتباينات التالية :

٢ س + ٤ ص ≥ ١٢

٥ س + ٣ ص ≥ ١٥

س ≤ صفر

ص ≤ صفر

الحــــل :

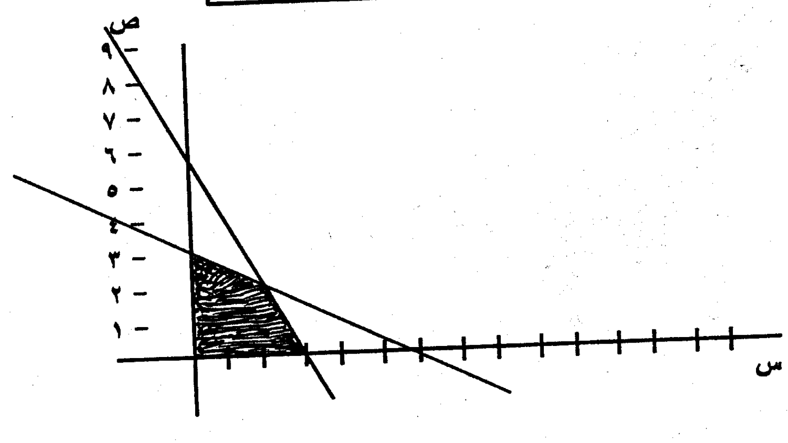
نحول المتباينات إلى معادلات :

∴ ٢ س + ٤ ص = ١٢　　،　٥ س + ٣ ص = ١٥

نرسم الخطوط المستقيمة التي تمثل المعادلات الأربع ، حيث :

المعادلة الأولى		
س	صفر	٦
ص	٣	صفر

المعادلة الثانية		
س	صفر	٣
ص	٥	صفر



ومــن هــذا الشــكل البيانــي ، نجد أن منطقة الحلول للمتباينات الأربع هي المنطقة المظللة في الشكل ، لأن :

☒ كـل من المتباينتين ٢ س + ٤ ص ≤ ١٢ ، ٥ س + ٣ ص ≤ ١٥ يمثلهما جميع النقاط التي أسفل أو يسار الخطين الممثلين لهما

☒ ومــن ناحــية أخرى نجد أن المتباينة س ≥ صفر يمثلهما جميع النقاط التي على يمين المحور الرأسي

☒ والمتبايــنة ص ≥ صــفر يمــثلهما جميع النقاط التي على أعلى المحور الأفقي.

مثـــال (٧)

أوجد بيانياً النهاية العظمى للدالة : ر = ٦ س + ٨ ص

بإيجاد القيمتين غير السالبتين للمتغيرين (س ، ص) في ظل القيود التالية :

٢ س + ٣ ص ≤ ١٢

٢ س + ص ≤ ٨

الحــــل :

نحول المتباينات إلى معادلات ونرسمها ، حيث :

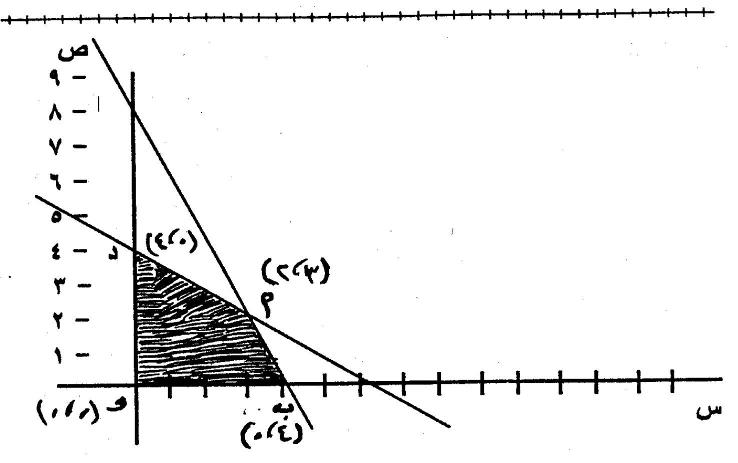
٢ س + ٣ ص = ١٢ ٢ س + ص = ٨

س = صفر ص = صفر

حيث :

المعادلة الأولى		
س	صفر	٦
ص	٤	صفر

المعادلة الثانية		
س	صفر	٤
ص	٨	صفر



ومــن هــذا الشــكل البيانـــي ، نجد أن منطقة الحلول للمتباينات الأربع هي المنطقة المظللة (أ ب و د) في الشكل ، والتي أركانه :

☒ النقطة (ب) وهي (٤ ، صفر)

☒ النقطة (و) وهي (صفر، صفر) لأنها تمثل نقطة الأصل .

☒ النقطة (د) وهي (صفر ، ٤)

☒ النقطة (أ) ونحصل عليها بحل المعادلتين : ٢ س + ٣ ص = ١٢

٢ س + ص = ٨

فنجد أن النقطة (أ) هي : (٣ ، ٢)

وتوجــد نظــرية هامة تبين أنه إذا كانت لدينا دالة خطية معرفة عند جمـــيع الــنقاط داخــل وعلــى محيط مضلع محدب ، فإن النهاية العظمى (أو الصـــغرى) لهـــذه الدالـــة لابد وأن توجد عند أحد أركان (أو رؤوس) هذا المضلع .

وبالتعويض بالإحداثي السيني والصادي للنقاط التي تمثل أركان منطقة الحلول ، وذلك في الدالة : ر = ٦ س + ٨ ص

نجد أن :

☒ عند النقطة (أ) وهي : (٣ ، ٢)

∴ ر = ٦ (٣) + ٨ (٢) = ١٨ + ١٦ = **٣٤**

☒ عند النقطة (ب) وهي : (٤ ، صفر)

∴ ر = ٦ (٤) + ٨ (صفر) = ٢٤ + صفر = **٢٤**

☒ عند النقطة (و) وهي : (صفر ، صفر)

∴ ر = ٦ (صفر) + ٨ (صفر) = **صفر**

☒ عند النقطة (د) وهي : (صفر ، ٤)

∴ ر = ٦ (صفر) + ٨ (٤) = صفر + ٣٢ = **٣٢**

وعلى ذلك فإن النهاية العظمى للدالة (ر) تكون عند النقطة (أ) ، حيث يكون الربح (ر) أكبر ما يمكن .

مثال (٨)

أوجد بيانياً النهاية الصغرى للدالة : ك = ٦ س + ٨ ص

بإيجاد القيمتين غير السالبتين للمتغيرين (س ، ص) في ظل القيود التالية :

٣ س + ٦ ص ≥ ٣٩

٥ س + ٢ ص ≥ ٢٥

الحل :

نحول المتباينات إلى معادلات ونرسمها ، حيث :

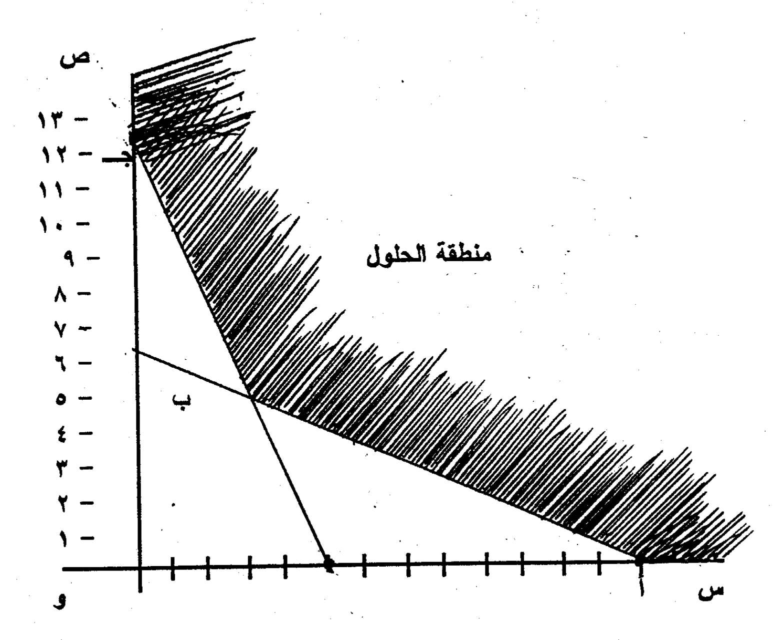
٣ س + ٦ ص = ٣٩   ٥ س +٢ ص = ٢٥

س = صفر   ص = صفر

حيث :

المعادلة الأولى		
س	صفر	١٣
ص	٦,٥	صفر

المعادلة الثانية		
س	صفر	٥
ص	١٢,٥	صفر



ومــن هــذا الشــكل البيانـــي ، نجد أن منطقة الحلول للمتباينات الأربع هي المنطقة المظللة (أ ب جـ) والمفتوحة لأعلى والتي أركانها :

- ☒ النقطة (أ) وهي (١٣ ، صفر)
- ☒ النقطة (جـ) وهي (صفر، ١٢,٥) لأنها تمثل نقطة الأصل ٠
- ☒ النقطة (ب) ونحصل عليها بحل المعادلتين :

٣ س + ٦ ص = ٣٩

٥ س +٢ ص = ٢٥

فنجد أن النقطة (ب) هي : (٣ ، ٥)

وبالتعويض بالإحداثي السينى والصادي للنقاط التي تمثل أركان منطقة الحلول ، وذلك في الدالة : ك = ٦ س + ٨ ص

نجد أن :

☒ عند النقطة (أ) وهي : (١٣ ، صفر)

∴ ك = ٦ (١٣) + ٨ (صفر) = ٧٨ + صفر = **٧٨**

☒ عند النقطة (ب) وهي : (٣ ، ٥)

∴ ك = ٦ (٣) + ٨ (٥) = ١٨ + ٤٠ = **٥٨**

☒ عند النقطة (جـ) وهي : (صفر ، ١٢,٥)

∴ ك = ٦ (صفر) + ٨ (١٢,٥) = صفر + ١٠٠ = **١٠٠**

وعلى ذلك فإن النهاية الصغرى للدالة (ك) تكون عند النقطة (ب) ، حيث يكون (ك) أقل ما يمكن .

وعلى ذلك إذاكانت الدالة (ك) تمثل التكاليف مثلاً ، وكانت المتغيرات (س) و (ص) ، وكانت تلك المتغيرات تمثل عدد الوحدات المنتجة من نوعين من المنتجات مثلاً ، فإنه لكي تكون تكاليف الإنتاج أقل ما يمكن (نهاية صغرى) فإنه يجب على المصنع إنتاج (٣) وحدات من المنتج الأول ، وإنتاج (٥) وحدات من المنتج الثاني .

(٦-٤) الطرق العامه لحل مشاكل البرمجه الخطيه :

المقصود بالطرق العامه لحل مشاكل البرمجه الخطيه تلك الطرق التى يمكن إستخدامها فى حل أى مشكله تتوافر فيها خصائص هذا النوع من النماذج ، ومن الطرق العامه لحل مشاكل البرمجه الخطيه طريقتين ، هما :

١ - الطريقه البيانيه .

٢ -طريقة السمبلكس .

ولسوف نقتصر في هذه المرحلة على دراسة الطريقه البيانيه ، مع ملاحظة أن الطريقه البيانيه تُستخدم فى حل نماذج البرمجه الخطيه فى حالة المشاكل التى تحتوى على متغيرين فقط ، أما إذا زاد عدد المتغيرات على ذلك فإن تطبيق هذه الطريقه يصبح غير عملى .

(٦-٥) الحل البياني لمشاكل البرمجة الخطية :

تُستخدم البرامج عادة في تحديد الحجوم المثلى للمشروعات التي تحقق أقصى الأرباح أو أدنى التكاليف تحت شروط الإلتزام بقيود معينة يمكن تمثيلها بعدد من المتباينات الخطية السابق شرحها .

** إجراءات حل مشكلة البرمجة الخطية :

إن الإجراءات الخاصة بحل أية مشكلة من مشاكل البرمجة الخطية تتخذ الخطوات التالية :

(١) *تحديد دالة الهدف* :

بمعنى تحديد ماهي الدالة التي نريد جعلها نهاية عظمى (كدالة الربح) أو نهاية صغرى (كدالة التكاليف) ، ويتم ذلك عادةً بإعطاء رمز لكل متغير ،

فإذا كان الهدف هو تحديد الكمية الواجب إنتاجها من سلعتين لتحقيق أكبر ربح ممكن ، فإننا نفرض مثلاً أن الكمية الواجب إنتاجها من السلعة الأولى (س) ومن السلعة الثانية (ص) وكان هامش الربح ٥ جنيهات للسلعة الأولى ، ١٠ جنيهات للسلعة الثانية ، فإنــه يمــكن التعبير عن الهــدف (الربح) بالمعادلة التاليه :

الربح (ر) = ١٠ س + ١٥ ص

ويكون الهدف هنا هو الوصول إلى قيم (س ، ص) التي تجعل الربح (ر) أكبر ما يمكن ، أما (س ، ص) فهما المتغيران المتصلان بالقرار .

(٢) *تحديد القيود المفروضة* :

وهي مجموعة القيود التي تفرضها طبيعة المشكلة ، والتي يمكن تمثيلها بعدد من المتباينات الخطية ، والتي تمثل عادةً الطاقات القصوى للمشروع ، وتُعرف بالقيود الهيكلية ، فإذا تعلق الأمر بالإنتاج ، فقد تكون القيود المفروضة عبارة عن كميات محدودة من المواد الأولية أو ساعات العمل أو خلافه . أي أننا نبحث عن الحل الأمثل في إطار هذه القيود الموضوعة ووضعها في صورة متباينات .

فعلى سبيل المثال ، إذا كان عدد ساعات العمل المتاحة على آلة معينة يساوي (١٠٠٠) ساعة ، وإذا افترضنا أن لدينا منتج (س ، ص) يتم تصنيعهما على تلك الآلة ، بحيث أن تصنيع وحده واحده من المنتج (س) يحتاج إلى ٤ ساعات عمل ، وتصنيع وحده واحده من المنتج (ص) يحتاج إلى ٣ ساعات عمل ، فيمكن التعبير عن هذه القيود بمتباينة كما يلي :

٤ س + ٣ ص ≥ ١٠٠٠

وهكذا بالنسبة لباقي الموارد المتاحة .

(٣) متطلبات عدم السالبية :

وهي القيود التي يفرضها الواقع العملي ، حيث أنه لا يمكن أن تنتج وحدات سالبه ، وبالتالي ، فإن :

س ≤ صفر

ص ≤ صفر

ومن هنا تتحول جميع القيود إلى متباينات •

(٤) التمثيل البياني للمتباينات :

يتم رسم جميع المتباينات التي تمثل القيود المفروضة ومتطلبات عدة السالبية ، والمنطقة التي تحقق جميع المتباينات هي منطقة الحلول الممكنة ، وعنى هذا أن أي نقطة داخل هذه المنطقة لها قيمة لكل من (س، ص) تحقق القيود المفروضة على الإنتاج •

(٥) تحقيق دالة الهدف :

تتمثل الخطوة الأخيرة في تحديد النقطة أو النقط (س ، ص) التي تحقق (بالإضافة إلى القيود المفروضة) دالة الهدف (أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة)

والأمثلة التالية توضح الخطوات العملية لحل مشاكل البرمجة الخطية •

مثال (٩)

تنتج إحدى الشركات نوعين من السلع ، النوع الأول يحتاج إلى (٢٠) وحدة من المادة الخام (أ) ، (٣) وحدات من المادة الخام (ب) • النوع الثاني يحتاج إلى (١٠) وحدة من المادة الخام (أ) ، (٦) وحدات من المادة الخام (ب) • فإذا علمت أن الشركة لديها (٧٠) وحدة من المادة الخام (أ)

(٢٤) وحدة من المادة الخام (ب) ، وإذا فرض وكان ربح الشركة (١٠) جنيه للوحدة من النوع الأول ، (٨) جنيه للوحدة من النوع الثاني ، المطلوب تحديد الكمية الواجب إنتاجها من كل نوع لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟٠

الحــل :

يمكن تلخيص المشكلة السابقة في الجدول التالي:

المنتج / المادة الخام	الأول	الثاني	المتاح
(أ)	٢٠	١٠	٧٠
(ب)	٣	٦	٢٤
الربح	١٠	٨	

وبفرض أن : عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول (س) ، وعدد الوحدات المنتجة من النوع الثاني (ص)

- يكون ربح النوع الأول (١٠ س) ، وربح النوع الثاني (٨ ص) ، ويكون الربح الكلي : ر = ١٠ س + ٨ ص

∴ دالة الهدف هي : ر = ١٠ س + ٨ ص

- تكون كمية المادة الخام (أ) اللازمة لإنتاج النوع الأول (٢٠ س) ، ويمثل (عدد الوحدات اللازمة لإنتاج الوحدة × عدد الوحدات) ، وتكون كمية المادة الخام (أ) اللازمة لإنتاج النوع الثاني (١٠ ص) ، وبذلك نجد أن كمية المادة الخام (أ) اللازمة لإنتاج النوعين يجب ألا تتعدى (٧٠) وحدة ، ويُعبر عن ذلك بالمتباينة التالية :

∴ ٢٠ س + ١٠ ص ≤ ٧٠

- وبنفس الطريقة ، نجد أن كمية المادة الخام (ب) اللازمة لإنتاج النوعين من السلع هي (٣ س + ٦ ص) يجب ألا تتعدى (٢٤) وحدة ، ويُعبر عن ذلك بالمتباينة التالية :

∴ ٣ س + ٦ ص ≤ ٢٤

- بالإضافة إلى ذلك ، فإنه لا يمكن إنتاج كميات سالبة من النوعين ، ويُعبر عن ذلك بالمتباينات التالية :

س ≥ صفر ، ص ≥ صفر

وعلى ذلك فإنه يمكن صياغة المشكله رياضياً كما يلي :

(١) دالة الهدف هي :

ر = ١٠ س + ٨ ص

(٢) القيود الهيكليه :

٢٠ س + ١٠ ص ≤ ٧٠

٣ س + ٦ ص ≤ ٢٤

(٣) متطلبات عدم السالبيه :

س ≥ صفر

ص ≥ صفر

وبعد ذلك يتم حل المشكلة بيانياً برسم الخطوط المستقيمة الممثلة للمتباينات بعد تحويلها إلى معادلات ، ومن ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة وأركانها ، ومن ثم يتم التعويض في دالة الهدف بتلك النقاط حتى يمكن تحديد النقطة التي تحقق دالة الهدف ٠

نحول المتباينات إلى معادلات ونرسمها ، حيث :

٢٠ س + ١٠ ص = ٧٠

٣ س + ٦ ص = ٢٤

س = صفر ، ص= صفر حيث :

المعادلة الأولى		
س	صفر	٣,٥
ص	٧	صفر

المعادلة الثانية		
س	صفر	٨
ص	٤	صفر

ومــن هــذا الشكل البياني ، نجد أن منطقة الحلول تتمثل في المضلع المظلل (أ ب و د) والذي تتحدد أركانه :

- ☒ النقطة (ب) وهي (٣,٥ ، صفر)
- ☒ النقطة (و) وهي (صفر، صفر) لأنها تمثل نقطة الأصل ٠
- ☒ النقطة (د) وهي (صفر ، ٤)
- ☒ النقطة (أ) ونحصل عليها بحل المعادلتين : ٢٠ س + ١٠ ص = ٧٠
  ٣ س + ٦ ص = ٢٤

فنجد أن النقطة (أ) هي : (٢ ، ٣)

وبالتعويض بالإحداثي السينى والصادي للنقاط التي تمثل أركان منطقة الحلول ، وذلك في دالة الهدف : ر = ١٠ س + ٨ ص

☒ عند النقطة (أ) وهي : (٢ ، ٣) ∴ ر = ١٠ (٢) + ٨ (٣) = **٤٤**

☒ عند النقطة (ب): (٣,٥ ، صفر) ∴ ر = ١٠ (٣,٥) + ٨ (٠) = **٣٥**

☒ عند النقطة (و): (صفر ، صفر) ∴ ر = ١٠ (٠) + ٨ (٠) = **صفر**

☒ عند النقطة (د): (صفر ، ٤) ∴ ر = ١٠ (٠) + ٨ (٤) = **٣٢**

وعلى ذلك فإن دالة الربح (ر) تصل إلى النهاية العظمى تكون عند النقطة (أ) ، أي يجب على الشركة أن تنتج وحدتين من النوع الأول ، وثلاث وحدات من النوع الثاني حتى يكون الربح (ر) أكبر ما يمكن .

مثال (١٠)

في المثال السابق حدد الطاقات المستغلة وتلك العاطلة ؟.

الحل : لتحديد الطاقات المستغلة (وكذلك العاطلة) لدى الشركة يتم التعويض بالقيم (س = ٢ ، ص = ٣) في المتباينتين :

٢٠ س + ١٠ ص ≥ ٧٠

٣ س + ٦ ص ≥ ٢٤

فنجد أنه عند إنتاج وحدتين من النوع الأول ، وثلاث وحدات من النوع الثاني ، فإنه لا توجد طاقات عاطلة لأن :

☒ الكمية المستخدمة من المادة الخام (أ) = (٢٠×٢) +(١٠×٣) = ٧٠ وهي الكمية المتاحة من المادة الخام (أ)

☒ الكمية المستخدمة من المادة الخام (ب) = (٣×٢) +(٦×٣) = ٢٤ وهي الكمية المتاحة من المادة الخام (ب)

وعلى ذلك ، لا توجد طاقات عاطلة .

مثال (١١)

في المثال السابق ماهي الكمية الواجب إنتاجها من كل نوع لتحقيق أكبر ربح ممكن إذا كان ربح الشركة هو (٨ جنيه) للوحدة من النوع الأول ، (٣٠ جنيه) للوحدة من النوع الثاني ، وحدد عندئذ الطاقات المستغلة والعاطلة ؟٠

الحــل :

نجري نفس الخطوات كما في المثال السابق مع جعل دالة الهدف :

ر = ٨ س + ٣٠ ص

ونحصل على نفس المضلع الممثل لمنطقة الحلول الذي رؤوسه النقاط :

أ (٢ ، ٣) ، ب (٣,٥ ، صفر) ، و (صفر ، صفر) ، د (صفر ، ٤)

وبالـتعويض بالإحداثــي الســينى والصـــادي للنقاط التي تمثل أركان منطقة الحلول ، وذلك في دالة الهدف :

ر = ٨ س + ٣٠ ص

☒ عند النقطة (أ) وهي : (٢ ، ٣) ∴ ر = ٨ (٢) + ٣٠ (٣) = **١٠٦**

☒ عند النقطة (ب): (٣,٥ ، صفر) ∴ ر = ٨ (٣,٥) + ٣٠ (٠) = **٢٨**

☒ عند النقطة (و): (صفر ، صفر) ∴ ر = ٨ (٠) + ٣٠ (٠) = **صفر**

☒ عند النقطة (د): (صفر ، ٤) ∴ ر = ٨ (٠) + ٣٠ (٤) = **١٢٠**

المطلوب الأول :

وعلـــى ذلك فإن دالة الربح (ر) تصل إلى النهاية العظمى عند النقطة (د) ، أي يجـــب على الشركة عدم إنتاج أي وحدات من النوع الأول ، وإنتاج ٤ وحدات من النوع الثاني حتى يكون الربح (ر) أكبر ما يمكن ٠

المطلوب الثاني :

لتحديد الطاقات المستغلة (وكذلك العاطلة) لدى الشركة يتم التعويض بالقيم (س = صفر ، ص = ٤) في المتباينتين :

٢٠ س + ١٠ ص ≥ ٧٠

٣ س + ٦ ص ≥ ٢٤

فنجد أنه عند عدم إنتاج شئ من النوع الأول ، وإنتاج ٤ وحدات من النوع الثاني ، يكون :

☒ الكمية المستخدمة من المادة الخام (أ) = (٢٠×٠) +(١٠×٤) = ٤٠

وحيث أن الكمية المتاحة من المادة الخام (أ) = ٧٠

توجد طاقة غير مستغلة من المادة الخام (أ) قدرها ٣٠ وحدة .

☒ الكمية المستخدمة من المادة الخام (ب) = (٣×٠) +(٦×٤) = ٢٤

وهي الكمية المتاحة من المادة الخام (ب)

وعلى ذلك :

نجد أن الشركة تقوم باستخدام الكمية القصوى من المادة الخام (ب) بينما توجد طاقات عاطلة في كمية المادة الخام (أ) قدرها ٣٠ وحدة غير مستغلة .

مثال (١٢)

سلعتان غذائيتان : الأولى تعطي (٤) سعر حراري وبها (٤) وحدات فيتامين ، والثانية تعطي (٦) سعر حراري وبها (٣) وحدات فيتامين ، فإذا كان المطلوب (٣٦) سعر حراري على الأقل ، (٢٤) وحدة فيتامين على الأقل، وبفرض أن سعر الوحدة من السلعة الأولى (٥جنيه) ومن الثانية (٧جنيه) ، فما هي الكمية الواجب شراؤها من السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة ؟.

الحـــل :

يمكن تلخيص المشكلة السابقة في الجدول التالي:

السلعة / الطاقة	الأولى	الثانية	المطلوب
سعر حرارى	٤	٦	٣٦
فيتامين	٤	٣	٢٤
التكلفة	٥	٧	

وبفرض أن :

- ❑ عدد الوحدات المشتراه من السلعة الأولى (س)
- ❑ وعدد الوحدات المشتراه من السلعة الثانية (ص)

وعلى ذلك فإنه يمكن صياغة المشكله رياضياً كما يلي :

(١) دالة الهدف هي : (بفرض أن التكلفة ك)

ك = ٥ س + ٧ ص

(٢) القيود الهيكليه :

٤ س + ٦ ص ≤ ٣٦

٤ س + ٣ ص ≤ ٢٤

(٣) متطلبات عدم السالبيه :

س ≤ صفر

ص ≤ صفر

(٤) نحول المتباينات إلى معادلات ونرسمها ، حيث :

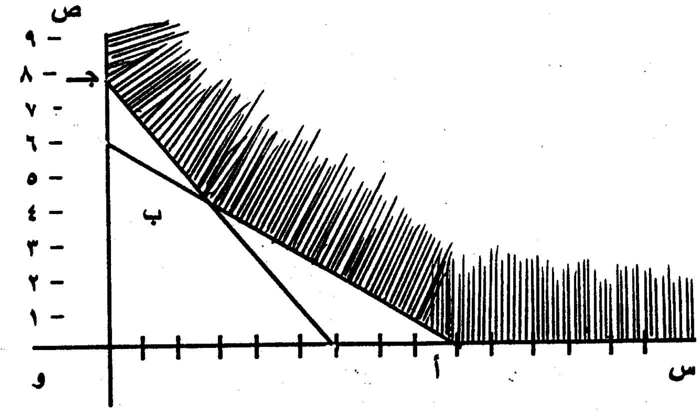
٤ س + ٦ ص = ٣٦

٤ س + ٣ ص = ٢٤

حيث : س = صفر ، ص= صفر

المعادلة الأولى		
س	صفر	٩
ص	٦	صفر

المعادلة الثانية		
س	صفر	٦
ص	٨	صفر



ومــن هــذا الشكل البياني ، نجد أن منطقة الحلول تتمثل في المضلع المظلل (أ ب جـ) (الفراغ العلوي) حيث تتحدد النقطة (ب) بحل المعادلتيْن :

٤ س + ٦ ص = ٣٦

٤ س + ٣ ص = ٢٤

فنجد أنها (٣ ، ٤) ، وعلى ذلك ، تتحدد أركان منطقة الحلول بالنقاط :

- النقطة (أ) وهي (٩ ، صفر)
- النقطة (ب) وهي (٣، ٤)
- النقطة (جـ) وهي (صفر ، ٨)

وبالتعويض بالإحداثي السينى والصادي للنقاط التي تمثل أركان منطقة الحلول ، وذلك في دالة الهدف :

ك = ٥ س + ٧ ص

- عند النقطة (أ) وهي : (٩ ، صفر)

∴ ك = ٥ (٩) + ٧ (صفر) = ٤٥ + صفر = **٤٥**

- عند النقطة (ب) وهي : (٣ ، ٤)

∴ ك = ٥ (٣) + ٧ (٤) = ١٥ + ٢٨ = **٤٣**

- عند النقطة (جـ) وهي : (صفر ، ٨)

∴ ك = ٥ (صفر) + ٧ (٨) = صفر + ٥٦ = **٥٦**

وعلى ذلك فإن دالة التكاليف (ك) تصل إلى النهاية الصغرى عند النقطة (ب) وهي (٣ ، ٤) ، أي يجب أن نحقق المطلوب بشراء (٣ وحدات) من السلعة الأولى ، وشراء (٤ وحدات) من السلعة الثانية حتى تكون التكاليف أقل ما يمكن ٠

تطبيقات تجارية على البرمجة الخطية :

تطبيق (١)

مصنع ينتج نوعين من الأجهزة الكهربائية ، الثلاجة والغسالة ، ويستخدم في إنتاج كل جهاز نوعين من الآلات .

فإذا كان إنتاج الثلاجة الواحدة يحتاج من الآلة الأولى إلى (٢) ساعة تشغيل ، ويحتاج من الآلة الثانية إلى (٣) ساعات تشغيل.

كما أن إنتاج الغسالة الواحدة يحتاج من الآلة الأولى إلى (٤) ساعة تشغيل ، ويحتاج من الآلة الثانية إلى (٢) ساعة تشغيل.

فإذا كان الحد الأقصى لساعات التشغيل اليومي للآلة الأولى (١٦) ساعة تشغيل ، والحد الأقصى لساعات التشغيل اليومي للآلة الثانية (١٢) ساعة تشغيل. وبفرض أن بيع الثلاجة الواحدة يحقق ربح قدره (٢٠ جنيه) ، وأن بيع الغسالة الواحدة يحقق ربح قدره (١٥ جنيه)

المطلوب :

(١) تحديد برنامج الإنتاج الأمثل الذي يحقق للمصنع أكبر ربح ممكن ؟.

(٢) تحديد الطاقات المستغلة والعاطلة ؟

الحـــل :

يمكن تلخيص المشكلة السابقة في الجدول التالي:

الموارد / المنتج	آلة (١)	آلة (٢)	الربح
الثلاجة (س)	٢	٣	٢٠
الغسالة (ص)	٤	٢	١٥
المتاح	١٦	١٢	

وبفرض أن :

عدد الوحدات المنتجة من الثلاجات (س)

وعدد الوحدات المنتجة من الغسالات (ص)

وعلى ذلك فإنه يمكن صياغة المشكله رياضياً كما يلي :

(١) دالة الهدف هي :

ر = ٢٠ س + ١٥ ص

(٢) القيود الهيكليه :

٢ س + ٤ ص ≥ ١٦

٣ س + ٢ ص ≥ ١٢

(٣) متطلبات عدم السالبيه :

س ≤ صفر

ص ≤ صفر

(٤) نحول المتباينات إلى معادلات ونرسمها ، حيث :

٢ س + ٤ ص = ١٦

٣ س + ٢ ص = ١٢

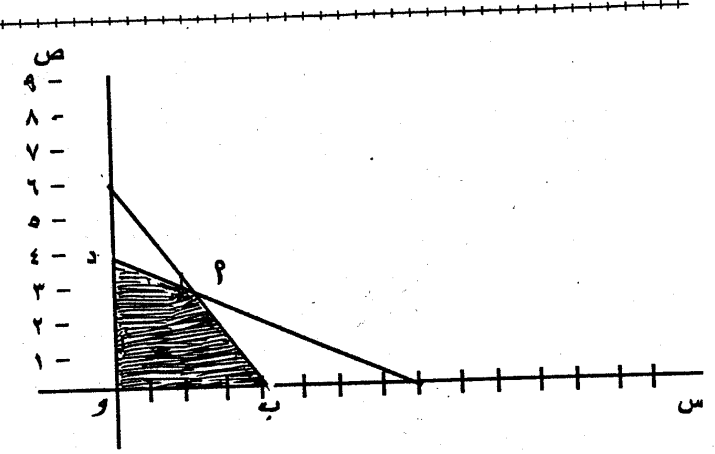
س = صفر

ص= صفر

حيث :

المعادلة الأولى		
س	صفر	٨
ص	٤	صفر

المعادلة الثانية		
س	صفر	٤
ص	٦	صفر



ومــن هــذا الشكل البياني ، نجد أن منطقة الحلول تتمثل في المضلع المظلل (أ ب و د) والذي تتحدد أركانه :حيث :

تتحدد النقطة (أ) ونحصل عليها بحل المعادلتين :

٢ س + ٤ ص = ١٦

٣ س + ٢ ص = ١٢

فنجد أن:

$$س = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 12 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{32-48}{4-12} = 2 \quad ، \quad ص = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{24-48}{4-12} = 3$$

وعلى ذلك تكون رؤوس منطقة الحلول هي :

☒ النقطة (أ) هي (٢ ، ٣)

☒ النقطة (ب) وهي (٤ ، صفر)

☒ النقطة (و) وهي (صفر، صفر) لأنها تمثل نقطة الأصل .

☒ النقطة (د) وهي (صفر ، ٤)

وبالتعويض بالإحداثي السيني والصادي للنقاط التي تمثل أركان منطقة الحلول ، وذلك في دالة الهدف :

ر = ٢٠ س + ١٥ ص

- عند النقطة (أ) وهي (٢ ، ٣) ∴ ر = ٢٠ (٢) + ١٥ (٣) = **٨٥**
- عند النقطة (ب) وهي (٤ ، صفر) ∴ ر = ٢٠ (٤) + ١٥ (٠) = **٨٠**
- عند (و) وهي (صفر ، صفر) ∴ ر = ٢٠ (٠) + ١٥ (٠) = **صفر**
- عند النقطة (د) وهي (صفر ، ٤) ∴ ر = ٢٠ (٠) + ١٥ (٤) = **٦٠**

وعلى ذلك فإن دالة الربح (ر) تصل إلى النهاية العظمى عند النقطة (أ) ، أي يجب على الشركة أن تنتج ثلاجتين ، وثلاث غسالات في اليوم الواحد حتى يكون الربح (ر) أكبر ما يمكن •

المطلوب الثاني :

لتحديد الطاقات المستغلة (وكذلك العاطلة) لدى الشركة يتم التعويض بالقيم (س = ٢ ، ص = ٣) في المتباينتين :

٢ س + ٤ ص ≤ ١٦

٣ س + ٢ ص ≤ ١٢

فنجد أنه عند إنتاج ثلاجتين ، وثلاث غسالات ، يكون :

- الساعات المستغلة للآلة الأولى = (٢×٢) +(٤×٣) = ١٦

وهذا يعني أن الآلة الأولى تعمل بطاقتها القصوى ، ولايوجد وقت ضائع•

- الساعات المستغلة للآلة الثانية = (٣×٢) +(٢×٣) = ١٢

وهذا يعني أن الآلة الثانية تعمل بطاقتها القصوى ، ولايوجد وقت ضائع•

وعلى ذلك لا توجد طاقات عاطلة في المصنع •

تطبيق (٢)

تقوم شركة عين شمس للأدوية بتصنيع نوعين مختلفين من أدوية المقويات ، ويدخل في تركيب هذه الأدوية نوعين من المواد الخام (س ، ص) .

فإذا كانت الوحدة من المادة الخام (س) تعطي (٢) وحدة فيتامين للنوع الأول من الدواء ، وتعطي (٦) وحدة فيتامين للنوع الثاني من الدواء

كما أن الوحدة من المادة الخام (ص) تعطي (٣) وحدة فيتامين للنوع الأول من الدواء ، وتعطي (٢) وحدة فيتامين للنوع الثاني من الدواء

فإذا كان الحد الأقصى لكمية الفيتامين المطلوبة للدواء الأول هو (٢٤) وحدة فيتامين ، والحد الأقصى لكمية الفيتامين المطلوبة للدواء الثاني هو (٣٠) وحدة فيتامين . فإذا علم أن تكلفة الحصول على وحدة المنتج من المادة الخام (س) (٢٥ جنيه) ، وأن تكلفة الحصول على وحدة المنتج من المادة الخام (ص) (٨ جنيه)

المطلوب :

(١) تحديد برنامج الإنتاج الأمثل الذي يحقق الحد الأدنى على الأقل لكمية الفيتامين المطلوبة لكل نوع من الأدوية بأقل تكلفة ممكنة ؟.

(٢) تحديد الكميات التي يحققها البرنامج من الفيتامين لكل نوع على حده ؟

الحـــل :

يمكن تلخيص المشكلة السابقة في الجدول التالي:

الدواء / المادة الخام	الأول	الثاني	التكلفة
(س)	٢	٦	٢٥
(ص)	٣	٢	٨
الحد الأدنى المطلوب	٢٤	٣٠	

وعلى ذلك فإنه يمكن صياغة المشكله رياضياً كما يلي :

(١) دالة الهدف هي :

ك = ٢٥ س + ٨ ص

(٢) القيود الهيكليه :

٢ س + ٣ ص ≤ ٢٤

٦ س + ٢ ص ≤ ٣٠

(٣) متطلبات عدم السالبيه :

س ≤ صفر

ص ≤ صفر

(٤) نحول المتباينات إلى معادلات ونرسمها ، حيث :

٢ س + ٣ ص = ٢٤

٦ س + ٢ ص = ٣٠

س = صفر

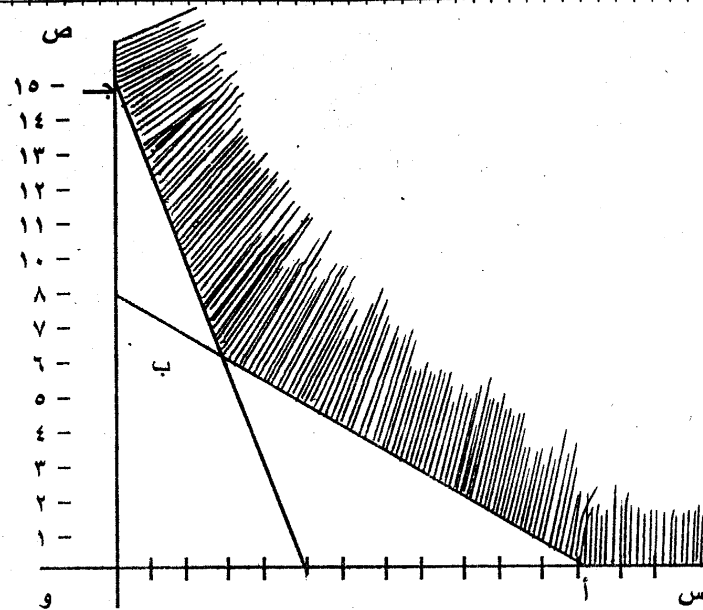
ص= صفر

حيث :

المعادلة الأولى		
س	صفر	١٢
ص	٨	صفر

المعادلة الثانية		
س	صفر	٥
ص	١٥	صفر

وبرسم المستقيمات السابقة ، نحصل على منطقة الحلول على النحو التالي :



ومـــن هـــذا الشكل البياني ، نجد أن منطقة الحلول تتمثل في المضلع المظلل (أ ب جـ) (الفراغ لأعلى) ، حيث :

تتحدد النقطة (ب) بحل المعادلتين :

٢ س + ٣ ص = ٢٤

٦ س + ٢ ص = ٣٠

فنجد أن:

$$\text{س} = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 \\ 30 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{48-90}{4-18} = 3 \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 24 \\ 6 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{60-144}{4-18} = 6$$

وعلى ذلك تكون رؤوس منطقة الحلول هي :

⊠ النقطة (أ) وهي (١٢ ، صفر)
⊠ النقطة (ب) وهي (٣ ، ٦)
⊠ النقطة (جـ) وهي (صفر ، ١٥)

وبالتعويض بالإحداثي السيني والصادي للنقاط التي تمثل أركان منطقة الحلول ، وذلك في دالة الهدف : ك = ٢٥ س + ٨ ص

⊠ عند النقطة (أ) وهي (١٢، صفر) ∴ ك = ٢٥ (١٢) + ٨ (٠) = **٣٠٠**
⊠ عند النقطة (ب) وهي (٣ ، ٦) ∴ ك = ٢٥ (٣) + ٨ (٦) = **١٢٣**
⊠ عند النقطة (جـ) وهي (صفر ، ١٥) ∴ ك = ٢٥ (٠) + ٨ (١٥) = **١٢٠**

وعلى ذلك فإن دالة التكاليف (ك) تصل إلى النهاية الصغرى عند النقطة (جـ) وهي (صفر ، ١٥) ، وهذا يعني أن برنامج الإنتاج الأمثل للشركة يقضي بأن تستبعد إستخدام المادة الخام (س) ، وتكتفي بشراء عدد ١٥ وحدة من المادة الخام (ص) ، وذلك لإنتاج النوعين من الأدوية بأقل تكلفة ممكنة ٠

المطلوب الثاني :

تتحدد كميات الفيتامين التي يحققها البرنامج لكل نوع من الأدوية كما يلي :

كمية الفيتامين التي يحققها الدواء الأول = ٢س + ٣ص
= (٢ × صفر) + (٣ × ١٥) = ٤٥ وحدة فيتامين ٠

وحيث أن الحد الأدنى المطلوب من كمية الفيتامين للدواء الأول = ٢٤ وحدة فقط ، فهذا يعني أن البرنامج يمكن أن يحقق وحدات من الفيتامين تزيد عن الحد الأدنى بمقدار (٤٥ - ٢٤ = ٢١ وحدة)

كمية الفيتامين التي يحققها الدواء الثاني = ٦ س + ٢ ص
= (٦ × صفر) + (٢ × ١٥) = ٣٠ وحدة فيتامين ٠

أي أن البرنامج يحقق الحد الأدنى تماما من كمية الفيتامين للدواء الثاني ٠

تطبيق (٣)

يقوم أحد المصانع بإنتاج نوعين من السلع (س ، ص) ، وكانت ظروف العملية الإنتاجية كالآتي :

- ☒ لدى المصنع آلتين ، الأولى للتجميع والثانية للتشطيب .
- ☒ يحتاج إنتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول إلى (٦) ساعات عمل للتجميع ، (٤) ساعات عمل للتشطيب للتشطيب .
- ☒ يحتاج إنتاج الوحدة الواحدة من النوع الثاني إلى (٦) ساعات عمل للتجميع ، (٨) ساعات عمل للتشطيب للتشطيب .
- ☒ لدى المصنع (٣٠٠) ساعة عمل لآلة التجميع ، (٣٢٠) ساعة عمل للتشطيب في الشهر القادم.
- ☒ ربح الوحدة الواحدة من النوع الأول (١٠ جنيه) ، وربح الوحدة الواحدة من النوع الثاني (١٢ جنيه) .

المطلوب :

(١) تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من نوعيْ السلع حتى يحقق المصنع أكبر ربح ممكن ؟.

(٢) تحديد الطاقات المستغلة والعاطلة في كل من آلتيْ التجميع والتشطيب ؟

الحــل :

يمكن تلخيص المشكلة السابقة في الجدول التالي:

الموارد / المنتج	آلة التجميع	آلة التشطيب	الربح
(س)	٦	٤	١٠
(ص)	٦	٨	١٢
الطاقة المتاحة	٣٠٠	٣٢٠	

وعلى ذلك فإنه يمكن صياغة المشكله رياضياً على النحو التالي :

(١) دالة الهدف هي :

ر = ١٠ س + ١٢ ص

(٢) القيود الهيكليه :

٦ س + ٦ ص ≥ ٣٠٠

٤ س + ٨ ص ≥ ٣٢٠

(٣) متطلبات عدم السالبيه :

س ≤ صفر

ص ≤ صفر

(٤) نحول المتباينات إلى معادلات ونرسمها ، حيث :

٦ س + ٦ ص = ٣٠٠

٤ س + ٨ ص = ٣٢٠

س = صفر

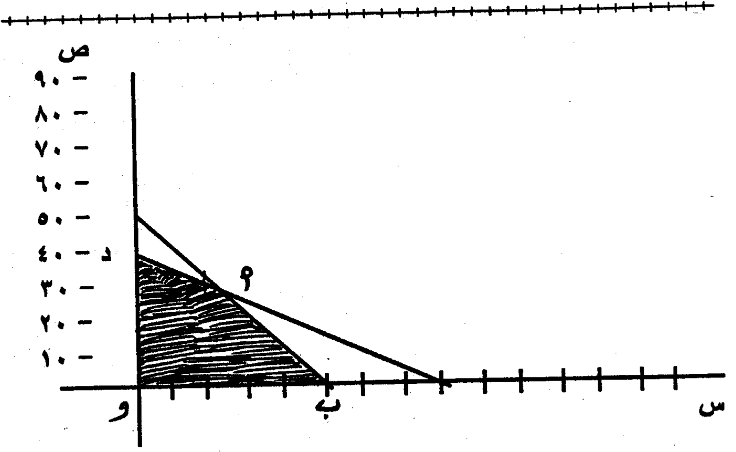
ص= صفر

حيث :

المعادلة الأولى		
س	صفر	٥٠
ص	٥٠	صفر

المعادلة الثانية		
س	صفر	٨٠
ص	٤٠	صفر

وبرسم المستقيمات السابقة ، نحصل على منطقة الحلول على النحو التالي :



ومــن هــذا الشكل البياني ، نجد أن منطقة الحلول تتمثل في المضلع المظلل (أ ب و . د) ، حيث تتحدد النقطة (أ) بحل المعادلتين :

٦ س + ٦ ص = ٣٠٠

٤ س + ٨ ص = ٣٢٠

فنجد أن:

$$س = \frac{\begin{vmatrix} ٣٠٠ & ٦ \\ ٣٢٠ & ٨ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٦ & ٦ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix}} = \frac{٢٤٠٠-١٩٢٠}{٤٨-٢٤} = ٢٠ \quad ، \quad ص = \frac{\begin{vmatrix} ٦ & ٣٠٠ \\ ٤ & ٣٢٠ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٦ & ٦ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix}} = \frac{١٩٢٠-١٢٠٠}{٤٨-٢٤} = ٣٠$$

وعلى ذلك تكون رؤوس منطقة الحلول هي :

- النقطة (أ) هي (٢٠ ، ٣٠)
- النقطة (ب) وهي (٥٠ ، صفر)
- النقطة (و) وهي (صفر، صفر) لأنها تمثل نقطة الأصل .
- النقطة (د) وهي (صفر ، ٤٠)

وبالتعويض بالإحداثي السيني والصادي للنقاط التي تمثل أركان منطقة الحلول ، وذلك في دالة الهدف :

ر = ١٠ س + ١٢ ص

- ☒ عند النقطة (أ) وهي (٢٠ ، ٣٠) ∴ ر = ١٠ (٢٠) + ١٢ (٣٠) = **٥٦٠**
- ☒ عند النقطة (ب) وهي (٥٠ ، صفر) ∴ ر = ١٠ (٥٠) + ١٢ (٠) = **٥٠٠**
- ☒ عند النقطة (و) وهي (صفر ، صفر) ∴ ر = ١٠ (٠) + ١٢ (٠) = **صفر**
- ☒ عند النقطة (د) وهي (صفر ، ٤٠) ∴ ر = ١٠ (٠) + ١٢ (٤٠) = **٤٨٠**

وعلى ذلك فإن دالة الربح (ر) تصل إلى النهاية العظمى عند النقطة (أ) ، أي يجب على الشركة أن تنتج (٢٠) وحدة من السلعة الأولى ، (٣٠) وحدة من السلعة الثانية في الشهر القادم حتى يكون الربح أكبر ما يمكن .

المطلوب الثاني :

لتحديد الطاقات المستغلة (وكذلك العاطلة) لدى المصنع يتم التعويض بالقيم (س = ٢٠ ، ص = ٣٠) في المتباينتين :

٦ س + ٦ ص ≥ ٣٠٠

٤ س + ٨ ص ≥ ٣٢٠

فنجد أنه عند إنتاج (٢٠) وحدة من السلعة الأولى ، (٣٠) وحدة من السلعة الثانية ، يكون :

☒ الساعات المستغلة لآلة التجميع = (٦×٢٠) +(٦×٣٠) = ٣٠٠

وهذا يعني أن آلة التجميع تعمل بطاقتها القصوى ، ولايوجد وقت ضائع.

☒ الساعات المستغلة لآلة التشطيب = (٤×٢٠) +(٨×٣٠) = ٣٢٠

وهذا يعني أن آلة التشطيب تعمل بطاقتها القصوى ، ولايوجد وقت ضائع.

وعلى ذلك لا توجد طاقات عاطلة في المصنع .

تطبيق (٤)

سلعتان غذائيتان : الأولى تعطي (٣) سعر حراري وبها (٥) وحدات فيتامين ، والثانية تعطي (٦) سعر حراري وبها (٢) وحدة فيتامين ، فإذا كان المطلوب (٣٩) سعر حراري على الأقل ، (٢٥) وحدة فيتامين على الأقل، وبفرض أن سعر الوحدة من السلعة الأولى (٦ جنيه) ومن الثانية (٨ جنيه) ، فما هي الكمية الواجب شراؤها من السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة ؟.

الحـــل :

يمكن تلخيص المشكلة السابقة في الجدول التالي:

السلعة / الطاقة	الأولى	الثانية	المطلوب
سعر حراري	٣	٥	٦
فيتامين	٦	٢	٨
التكلفة	٣٩	٢٥	

وبفرض أن :

- ☐ عدد الوحدات المشتراه من السلعة الأولى (س)
- ☐ وعدد الوحدات المشتراه من السلعة الثانية (ص)

وعلى ذلك فإنه يمكن صياغة المشكله رياضياً كما يلي :

(١) دالة الهدف هي : (بفرض أن التكلفة (ك)

ك = ٦ س + ٨ ص

(٢) القيود الهيكليه :

٣ س + ٦ ص ≤ ٣٩

٥ س + ٢ ص ≤ ٢٥

(٣) متطلبات عدم السالبيه :

س ≤ صفر

ص ≤ صفر

(٤) نحول المتباينات إلى معادلات ونرسمها ، حيث :

٣ س + ٦ ص = ٣٩

٥ س + ٢ ص = ٢٥

س = صفر

، ص= صفر

حيث :

المعادلة الأولى		
س	صفر	١٣
ص	٦,٥	صفر

المعادلة الثانية		
س	صفر	٥
ص	١٢,٥	صفر

ومن الشكل البياني السابق ، نجد أن منطقة الحلول تتمثل في المضلع المظلل (أ ب جـ) (الفراغ العلوي) حيث تتحدد النقطة (ب) بحل المعادلتين :

٣ س + ٦ ص = ٣٩

٥ س + ٢ ص = ٢٥

فنجد أنها (٣ ، ٥) ، وعلى ذلك ، تتحدد أركان منطقة الحلول بالنقاط :

- ☒ النقطة (أ) وهي (١٣ ، صفر)
- ☒ النقطة (ب) وهي (٣، ٥)
- ☒ النقطة (جـ) وهي (صفر ، ١٢,٥)

وبالتعويض بالإحداثي السينى والصادي للنقاط التي تمثل أركان منطقة الحلول ، وذلك في دالة الهدف :

ك = ٦ س + ٨ ص

☒ عند النقطة (أ) وهي : (١٣ ، صفر)

∴ ك = ٦ (١٣) + ٨ (صفر) = ٧٨ + صفر = **٧٨**

☒ عند النقطة (ب) وهي : (٣ ، ٥)

∴ ك = ٦ (٣) + ٨ (٥) = ١٨ + ٤٠ = **٥٨**

☒ عند النقطة (جـ) وهي : (صفر ، ١٢,٥)

∴ ك = ٦ (صفر) + ٨ (١٢,٥) = صفر + ١٠٠ = **١٠٠**

وعلى ذلك فإن دالة التكاليف (ك) تصل إلى النهاية الصغرى عند النقطة (ب) وهي (٣ ، ٥) ، أي يجب أن نحقق المطلوب بشراء (٣ وحدات) من السلعة الأولى ، وشراء (٥ وحدات) من السلعة الثانية حتى تكون التكاليف أقل ما يمكن .

تمارين الفصل السادس

(١) أوجد النهاية العظمى للدالة التالية بالطريقة البيانية :

ر = ٢٠ س + ١٥ ص

تحت شرط :

٢ س + ٤ ص ≥ ١٦

٣ س + ٢ ص ≥ ١٢

س ≤ صفر ، ص ≤ صفر

(٢) أوجد النهاية الصغرى للدالة التالية بالطريقة البيانية :

ك = ٢٥ س + ٨ ص

تحت شرط :

٢ س + ٣ ص ≤ ٢٤

٦ س + ٢ ص ≤ ٣٠

س ≤ صفر ، ص ≤ صفر

(٣) أوجد بيانياً النهاية العظمى للدالة : ر = ١٢ س + ١٠ ص

بإيجاد القيمتين غير السالبتين للمتغيرين (س ، ص) في ظل القيود التالية :

٤ س + ٣ ص ≥ ٢٤

٢ س + ص ≥ ١٠

(٤) أوجد بيانياً النهاية العظمى للدالة : ر = ٢ س + ٥ ص

بإيجاد القيمتين غير السالبتين للمتغيرين (س ، ص) في ظل القيود التالية :

٤ س + ص ≥ ٢٤

س + ٣ ص ≥ ٢١

س + ص ≥ ٩

(٥) أوجد بيانياً النهاية العظمى للدالة :

ر = ٤٠ س + ٣٠ ص

بإيجاد القيمتين غير السالبتين للمتغيرين (س ، ص) في ظل القيود التالية :

س ≤ ١٦

ص ≤ ٨

س +٢ ص ≤ ٢٤

(٦) أوجد النهاية العظمى للدالة التالية بالطريقة البيانية :

ر = ٢ س + ٢ ص

تحت شرط : س ≥ صفر

ص ≥ صفر

س + ص ≤ ٢٠

(٧) يقوم مصنع بإنتاج نوعين من السلع (أ ، ب) ، ولدى هذا المصنع نوعين من الآلات ، فإذا كان إنتاج الوحدة الواحدة من السلعة (أ) يحتاج إلى (٢) ساعة تشغيل على الآلة الأولى ، ويحتاج إلى (٢) ساعة تشغيل على الآلة الثانية ، كما أن إنتاج الوحدة الواحدة من السلعة (ب) يحتاج إلى (٣) ساعة تشغيل على الآلة الأولى ، ويحتاج إلى (١) ساعة تشغيل على الآلة الثانية ، فإذا كانت طاقة التشغيل اليومي للآلة الأولى (١٢) ساعة تشغيل ، وطاقة التشغيل اليومي للآلة الثانية (٨) ساعات تشغيل، وأن الربح المقدر للوحدة الواحدة من النوعين من السلع هو (٦ ، ٨ جنيه) على الترتيب ،

المطلوب :

(١) تحديد برنامج الإنتاج الأمثل الذي يحقق للمصنع أكبر ربح ممكن ؟،

(٢) تحديد الطاقات المستغلة والعاطلة ؟

(٨) قرر الطبيب أن يعطي مريض ما غذاء يحقق له (٤٠٠٠) سعر حراري (٢٠٠) وحدة بروتين في اليوم الواحد ، وكان لدى المستشفى نوعان من الغذاء يتفقان مع الحالة الصحية للمريض : النوع الأول (س) تحتوي الوحدة منه على (٥٠٠) سعر حراري وبها (٥٠) وحدة بروتين النوع الثاني (ص) تحتوي الوحدة منه على (٢٠٠٠) سعر حراري وبها (٥٠) وحدة بروتين ، وبفرض أن سعر الوحدة من الغذاء الأول (٢ جنيه) وسعر الوحدة من الغذاء الثاني (٨ جنيه) ، فما هي الكمية الواجب توفيرها من نوعيْ الغذاء لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة ؟٠

(٩) ترغب إحدى شركات النقل البحري نقل ثلاث شحنات (أ ، ب ، جـ) إلى إحدى الموانئ البحرية بجمهورية مصر العربية على سفينتيْن على شكل عدد من الرحلات خلال الشهر القادم ، فإذا كانت محددات عملية النقل على النحو التالي :

١- يجب نقل (٢٠٠٠٠) طن من الشحنة (أ) على الأقل ، (٢١٠٠٠ ، ١٥٠٠٠) طن لكل من الشحنتيْن (ب ، جـ) على الأكثر ٠

٢- أن كمية الشحنات التي يمكن نقلها في الرحلة الواحدة على أي من السفينتيْن بالأطنان تتحدد على النحو التالي :

الشحنة \ السفينة	الأولى	الثانية
أ	٥٠٠٠	٥٠٠٠
ب	٧٠٠٠	---
جـ	---	٥٠٠٠

٣- أن تكلفة النقل للرحلة الواحدة هي (١٠٠٠ ، ١٤٠٠) جنيه لكل من السفينتين على التوالي .

المطلوب :

في ظل هذه القيود لعملية النقل أوجد عدد الرحلات التي يجب أن تقوم بها كل سفينة في الشهر القادم بشرط جعل التكلفة الإجمالية للنقل أقل ما يمكن ؟.

(١٠) يقوم أحد مصانع النسيج اليدوي بإنتاج نوعين من السلع (س ، ص) ويحقق ربحا قدره (٣٠) جنيه من بيع الوحدة من (س) ، (٤٠) جنيه من بيع الوحدة من (ص) ، ويعمل في هذا المصنع ثلاث فئات من العمال : عمال مهرة (أ) ، وعمال متوسطي المهارة (ب) ، وعمال عاديين (جـ) ، كل يعمل لمدة (٨) ساعات يومياً .

فإذا علمت أن إنتاج الوحدة من (س) يستغرق $\frac{١}{٤}$ ساعة من العامل الماهر ، $\frac{٢}{٣}$ ساعة من العامل العادي ، وأن إنتاج الوحدة من (ص) يستغرق $\frac{٢}{٣}$ ساعة من العامل متوسط المهارة ، $\frac{١}{٢}$ ساعة من العامل العادي .

المطلوب تحديد تشكيلة الإنتاج المثلى من السلعتين والتي تحقق للمصنع أعلى ربح ممكن في ظل الظروف المتاحة ؟.

الفصل السابع

التفاضل وتطبيقاته التجارية

* مقدمة .
* متوسط التغير والميل .
* معدل التغير اللحظي .
* القواعد الأساسية للتفاضل .
* التطبيقات التجارية للتفاضل .
* النهايات العظمى والصغرى .
* التطبيقات التجارية للتفاضل والنهايات العظمى والصغرى .

(٧-١) مقدمة

يتـناول هـذا الفصل دراسة التغير في الظواهر المختلفة لما لها من مكانـة هامة وأساسية في مجالات التخطيط والتنبؤ واتخاذ القرارات ، وخاصة تلك المجالات الأقتصادية والتجارية • فدراسة التغير في الظواهر المختلفة من الأمور الضرورية والهامة في تخطيط تلك الظواهر والتنبؤ بها في المستقبل ، ويكون ذلك من خلال التعرف على معدل ذلك التغير ومقداره وإتجاهه وأسبابه ونتائجه و•••• إلخ•

كمـا يتـناول هذا الفصل دراسة التفاضل من حيث المفهوم والقواعد الأساسية له ، مع التركيز على تطبيقات التفاضل التجارية في إيجاد النهايات العظمى والصغرى والتطبيقات التجارية والإقتصادية الأخرى •

(٧-٢) متوسط التغير والميل :

إذا إفترضنا أن دالة الربح (ر) هي :

$$ر = د (س) = ١٠٠ س - س^٢$$

حيث (س) تمثل سعر بيع الوحدة ، فإذا كانت س = ٢ جنيه ، فإن :

$$الربح = ر = د (٢) = ١٠٠ (٢) - (٢)^٢$$

$$= ٢٠٠ - ٤ = ١٩٦ \text{ جنيه } •$$

وإذا إرتفع سعر بيع الوحدة إلى : س = ٤ جنيه ، فإن :

$$الربح = ر = د (٤) = ١٠٠ (٤) - (٤)^٢$$

$$= ٤٠٠ - ١٦ = ٣٨٤ \text{ جنيه } •$$

∴ مقدار التغير في الربح = ٣٨٤ - ١٩٦ = + ١٨٨ جنيه• (بإشارة موجـبة) ويعني ذلك أن زيادةسعر بيع الوحدة بمقدار (٢جنيه) قد أدت إلى زيادة الربح بمقدار (١٨٨ جنيه) •

فإذا رمزنا لمقدار التغير في السعر (س) بالرمز $\Delta_{س}$ ، ومقدار التغير في الربح (ر) بالرمز $\Delta_{ر}$ ، فإن :

نسبة التغير (متوسط التغير) في الربح = $\frac{\Delta_{ر}}{\Delta_{س}}$

$$= \frac{د(٤) - د(٢)}{٤ - ٢} = \frac{١٨٨}{٢} = ٩٤$$ جنيه .

وهذا الناتج هو نفسه ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (٢ ، ١٩٦) ، (٤ ، ٣٨٤)

وبصفة عامة إذا كان لدينا الدالة :

ص = د (س)

وحدث تغير في المتغير المستقل (س) مقداره $\Delta_{س}$ ، فإن ذلك سيؤدي إلى حدوث تغير في المتغير التابع (ص) مقداره $\Delta_{ص}$ ، وعلى ذلك ، فإن :

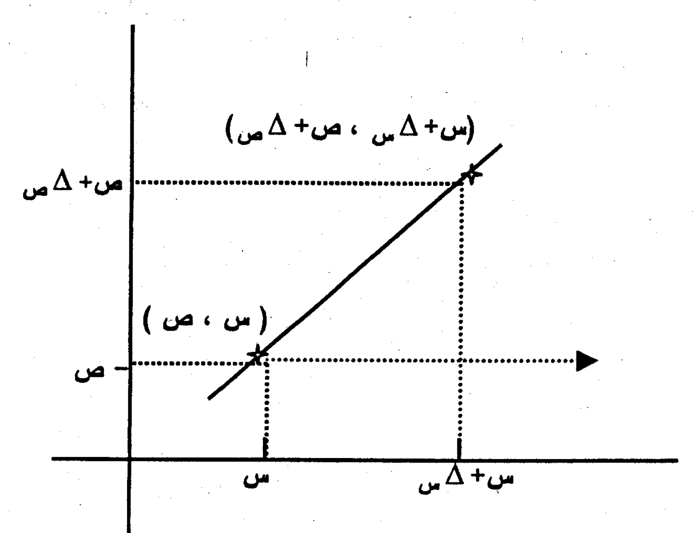
$$ص + \Delta_{ص} = د (س + \Delta_{س})$$

$$\therefore \Delta_{ص} = د (س + \Delta_{س}) - ص$$

ويكون :

$$\text{متوسط معدل التغير} = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta_{س}} = \frac{د (س + \Delta_{س}) - د (س)}{\Delta_{س}}$$

وهو نفسه ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (س ، ص) ، (س+ $\Delta_{س}$ ، ص+ $\Delta_{ص}$)، حيث يساوي ظل الزاوية التي يصنعها الخط مع الإتجاه الموجب لمحور السينات . ويمكن توضيح ذلك بيانياً على النحو التالي :



ومن هذا الشكل يتضح أن متوسط معدل التغير = $\frac{\Delta_{ص}}{\Delta_{س}}$ = ظا (ق)

وهــو مــيل الخــط المســتقيم الواصــل بين النقطتيْن (س ، ص) ، (س+Δس ، ص+Δص) .

ومــن هــنا نجد أن متوسط معدل التغير = $\frac{\Delta_{ص}}{\Delta_{س}}$ ، أي نسبة التغــير (ص) إلــى التغير (س) . وإذا صغرت قيمة $\Delta_{س}$ صغراً نهائياً حــتى تــؤول إلى الصفر ، فيُسمى متوسط معدل التغير في هذه الحالة بمعــدل التغــير اللحظــي في الدالة (ص) بالنسبة إلى المتغير المستقل (س) ، ويُرمز له بالرمز $\frac{د}{د س}$د(س) أو $\frac{د ص}{د س}$ أو $\overline{ص}$.

وعلى ذلك يكون :

معدل التغير اللحظي = $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \lim_{\Delta_{\text{س}} \to \text{صفر}} \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta_{\text{س}}}$

ويُسمى معدل التغير اللحظي ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ بالمشتقة الأولى للدالة أو المعامل التفاضلي الأول للدالة (ص) بالنسبة للمتغير (س) .

وعلى ذلك نجد أن التفاضل هو علم يقيس التغيرات التي تحدث في قيمة دالة ما نتيجة لحدوث تغير في قيمة المتغير المستقل بها . والأمثلة التالية توضح كيفية حساب المعامل التفاضلي الأول باستخدام المبادئ الأولية .

مثال (١)

أوجد متوسط معدل التغير للدالة :

$$\text{ص} = ٢\,\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س} + ٤$$

عندما تتغير (س) من ٣ إلى ٥ ؟.

الحل :

$\because \text{ص} = ٢\,\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س} + ٤$

$\therefore \text{ص} + \Delta_{\text{ص}} = ٢\,(\text{س} + \Delta_{\text{س}})^{٢} + ٥\,(\text{س} + \Delta_{\text{س}}) + ٤$

$= ٢\,(\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + \overline{\Delta_{\text{س}}}^{٢}) + ٥\,\text{س} + ٥\,\Delta_{\text{س}} + ٤$

$= ٢\,\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + ٢\,\overline{\Delta_{\text{س}}}^{٢} + ٥\,\text{س} + ٥\,\Delta_{\text{س}} + ٤$

$\therefore \Delta_{\text{ص}} = ٢\,\text{س}^{٢} + ٤\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + ٢\,\overline{\Delta_{\text{س}}}^{٢} + ٥\,\text{س} + ٥\,\Delta_{\text{س}} + ٤ - \text{ص}$

$\therefore \Delta_{ص} = ٢\, س^{٢} + ٤س\, \Delta_{س} + ٢\, \overline{\Delta_{س}}^{\,٢} + ٥\, س + ٥\, \Delta_{س} + ٤$

$- ٢\, س^{٢} - ٥\, س - ٤$

$\therefore \Delta_{ص} = ٤س\, \Delta_{س} + ٢\, \overline{\Delta_{س}}^{\,٢} + ٥\, \Delta_{س}$

وبقسمة الطرفين على $\Delta_{س}$

$\therefore \frac{\Delta_{ص}}{\Delta_{س}} = ٤س + ٢\, \Delta_{س} + ٥$

∴ متوسط معدل التغير في الدالة = $٤س + ٢\, \Delta_{س} + ٥$

وعندما تتغير (س) من ٣ إلى ٥ ، أي :

$س = ٣ \quad ، \quad \Delta_{س} = ٢$

∴ متوسط معدل التغير في الدالة = $٤(٣) + ٢\,(٢) + ٥ = \boxed{٢١}$

مثـــال (٢)

مصـــنع لصـــناعة الأدوات المنزلية به (٨٠) عامل ، فإذا علمت أن المصـــنع ينـــتج سلعة واحدة فقط ، وكانت العلاقة بين حجم المنتج (ص) ، وعدد العمال (س) هي :

$$ص = ٢\frac{١}{٢}\, س^{٢} + ٤\, س$$

أوجد متوسط معدل التغير للدالة السابقة عندما يتغير عدد العمال (س) من ٨٠ إلى ١٠٠ عامل ؟.

الحـــل :

$\therefore ص = ٢\frac{١}{٢}\, س^{٢} + ٤\, س$

$$\therefore \text{ص} + \Delta_{\text{ص}} = ٢\frac{١}{٢}\,(\text{س} + \Delta_{\text{س}})^{٢} + ٤\,(\text{س} + \Delta_{\text{س}})$$

$$= ٢\frac{١}{٢}\,(\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + \overline{\Delta_{\text{س}}}^{\,٢}) + ٤\,\text{س} + ٤\,\Delta_{\text{س}}$$

$$= ٢\frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + ٢\frac{١}{٢}\,\overline{\Delta_{\text{س}}}^{\,٢} + ٤\,\text{س} + ٤\,\Delta_{\text{س}}$$

$$\therefore \Delta_{\text{ص}} = ٢\frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + ٢\frac{١}{٢}\,\overline{\Delta_{\text{س}}}^{\,٢} + ٤\,\text{س} + ٤\,\Delta_{\text{س}} - \text{ص}$$

$$\therefore \Delta_{\text{ص}} = ٢\frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + ٢\frac{١}{٢}\,\overline{\Delta_{\text{س}}}^{\,٢} + ٤\,\text{س} + ٤\,\Delta_{\text{س}}$$

$$- ٢\frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س}$$

$$\therefore \Delta_{\text{ص}} = ٥\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + ٢\frac{١}{٢}\,\overline{\Delta_{\text{س}}}^{\,٢} + ٤\,\Delta_{\text{س}}$$

وبقسمة الطرفين على $\Delta_{\text{س}}$

$$\therefore \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta_{\text{س}}} = ٥\,\text{س} + ٢\frac{١}{٢}\,\Delta_{\text{س}} + ٤$$

$\therefore$ متوسط معدل التغير في الدالة $= ٥\,\text{س} + ٢\frac{١}{٢}\,\Delta_{\text{س}} + ٤$

وعندما تتغيرعدد العمال (س) من ٨٠ إلى ١٠٠ ، أي :

$$\text{س} = ٨٠ \quad ، \quad \Delta_{\text{س}} = ٢٠$$

$\therefore$ متوسط معدل التغير في الدالة =

$$= \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta_{\text{س}}} = ٥(٨٠) + ٢\frac{١}{٢}\,(٢٠) + ٤$$

$$= ٤٠٠ + ٥٠ + ٤ = \boxed{٤٥٤}$$

مثـــال (٣)

أوجد معدل التغير اللحظي للدالة (المشتقة الأولى) :

$$ص = س^٢ + ٥ س$$

وذلك باستخدام المبادئ الأولية ؟.

الحـــل :

$\because$ ص = س^٢ + ٥ س

$\therefore$ ص + $\Delta_{ص}$ = (س + $\Delta_{س}$)^٢ + ٥ (س + $\Delta_{س}$)

= س^٢ + ٢ س $\Delta_{س}$ + $\overline{\Delta_{س}}^٢$ + ٥ س + ٥ $\Delta_{س}$

$\therefore$ $\Delta_{ص}$ = س^٢ + ٢ س $\Delta_{س}$ + $\overline{\Delta_{س}}^٢$ + ٥ س + ٥ $\Delta_{س}$ − ص

$\therefore$ $\Delta_{ص}$ = س^٢ + ٢ س $\Delta_{س}$ + $\overline{\Delta_{س}}^٢$ + ٥ س + ٥ $\Delta_{س}$ − س^٢ − ٥ س

$\therefore$ $\Delta_{ص}$ = ٢ س $\Delta_{س}$ + $\overline{\Delta_{س}}^٢$ + ٥ $\Delta_{س}$

وبقسمة الطرفين على $\Delta_{س}$

$\therefore$ $\frac{\Delta_{ص}}{\Delta_{س}}$ = ٢ س + $\Delta_{س}$ + ٥

وبأخذ نهاية الطرفين عندما تؤول $\Delta_{س}$ إلى الصفر :

$\therefore$ $\lim_{\Delta_{س} \to صفر} \frac{\Delta_{ص}}{\Delta_{س}} = \lim_{\Delta_{س} \to صفر}$ (٢ س + $\Delta_{س}$ + ٥)

$\therefore$ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س + ٥

= معدل التغير اللحظي للدالة.

مثــال (٤)

باســتخدام المــبادئ الأولية أوجد المشتقة الأولى (المعامل التفاضلي الأول) للدالة :

$$ص = س^{٢}$$

الحــل :

$\because$ ص = $س^{٢}$

$\therefore$ ص + $\Delta_{ص}$ = $(س + \Delta_{س})^{٢}$

= $س^{٢}$ + ٢ س $\Delta_{س}$ + $\overline{\Delta_{س}}^{٢}$

$\therefore$ $\Delta_{ص}$ = $س^{٢}$ + ٢ س $\Delta_{س}$ + $\overline{\Delta_{س}}^{٢}$ − ص

$\therefore$ $\Delta_{ص}$ = $س^{٢}$ + ٢ س $\Delta_{س}$ + $\overline{\Delta_{س}}^{٢}$ − $س^{٢}$

$\therefore$ $\Delta_{ص}$ = ٢ س $\Delta_{س}$ + $\overline{\Delta_{س}}^{٢}$

وبقسمة الطرفين على $\Delta_{س}$

$\therefore$ $\frac{\Delta_{ص}}{\Delta_{س}}$ = ٢ س + $\Delta_{س}$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما تؤول $\Delta_{س}$ إلى الصفر :

$\therefore$ $\underset{\Delta_{س} \leftarrow صفر}{نهـا} \frac{\Delta_{ص}}{\Delta_{س}}$ = $\underset{\Delta_{س} \leftarrow صفر}{نهـا}$ (٢ س + $\Delta_{س}$)

$\therefore$ $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س

= المشتقة الأولى للدالة.

مثـــال (٥)

باســتخدام المــبادئ الأولية أوجد المشتقة الأولى (المعامل التفاضلي الأول) للدالة :

$$\text{ص} = ٥\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س}$$

الحــل :

$$\because\ \text{ص} = ٥\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س}$$

$$\therefore\ \text{ص} + \Delta_{\text{ص}} = ٥\,(\text{س} + \Delta_{\text{س}})^{٢} + ٣\,(\text{س} + \Delta_{\text{س}})$$

$$= ٥\,(\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + \Delta_{\text{س}}^{٢}) + ٣\,\text{س} + ٣\,\Delta_{\text{س}}$$

$$= ٥\,\text{س}^{٢} + ١٠\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + ٥\,\Delta_{\text{س}}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٣\,\Delta_{\text{س}}$$

$$\therefore\ \Delta_{\text{ص}} = ٥\,\text{س}^{٢} + ١٠\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + ٥\,\Delta_{\text{س}}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٣\,\Delta_{\text{س}} - \text{ص}$$

$$= ٥\,\text{س}^{٢} + ١٠\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + ٥\,\Delta_{\text{س}}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٣\,\Delta_{\text{س}}$$

$$- ٥\,\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س}$$

$$\therefore\ \Delta_{\text{ص}} = ١٠\,\text{س}\,\Delta_{\text{س}} + ٥\,\Delta_{\text{س}}^{٢} + ٣\,\Delta_{\text{س}}$$ وبالقسمة على $\Delta_{\text{س}}$

$$\therefore\ \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta_{\text{س}}} = ١٠\,\text{س} + ٥\,\Delta_{\text{س}} + ٣$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما تؤول $\Delta_{\text{س}}$ إلى الصفر :

$$\therefore\ \underset{\Delta_{\text{س}} \to \text{صفر}}{\text{نهـــا}}\ \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta_{\text{س}}} = \underset{\Delta_{\text{س}} \to \text{صفر}}{\text{نهـــا}}\ (١٠\,\text{س} + ٥\,\Delta_{\text{س}} + ٣)$$

$$\therefore\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١٠\,\text{س} + ٣$$

= المشتقة الأولى للدالة.

التفاضل (معدل التغير اللحظي)

ممـــا سبق نجد أن معدل التغير اللحظي يُسمى بالمشتقة الأولى أو المعامل التفاضلي الأول للدالة :

ص = د (س)

ويُرمز للمشتقة الأولى للدالة بأي من الرموز التالية :

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ أو $\bar{\text{ص}}$ أو $\bar{\text{د}}$ (س) أو $\frac{\text{د د(س)}}{\text{د س}}$ أو $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ د(سَ)

وبالـــتالى نجـــد أن المعـــامل التفاضلي الأول للدالة : ص = د (س) ، يقيس معدل تغير المتغير التابع (ص) لحظة حدوث تغير طفيف جداً في المتغـــير المستقل (س) ، كما تعكس هذه المشتقة ميل المماس لمنحنى الدالة .

(٧-٥) قواعد التفاضل :

يوجـــد طـــرق اكـــثر كفـــاءة للحصول على المشتقة بدلا من إستخدام المـــبادئ الأولية ، ونتناول فيما يلي للقواعد الأساسية للتفاضل ، وذلك لخدمة التطبيقات التجارية للتفاضل.

(٧-٥-١) تفاضل الدالة الثابتة :

إذا كانت : ص = د (س) = ك ، حيث ك أي عدد ثابت ، فإن :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = صفر أو $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (ك) = صفر

فمثلاً : إذا كانت : ص = د (س) = ٧٥

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = صفر

(٧-٥-٢) قاعدة القوى (الأس) :

إذا كانت : ص = د (س) = $س^{ن}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، فإن :

$$\frac{د ص}{د س} = ن س^{ن-1}$$

أي أن :

$$\frac{د}{د س}(س^{ن}) = ن س^{ن-1}$$

ملحوظة :

إذا كانت : ص = د (س) = س ، فإن : $\frac{د ص}{د س} = 1$

فمثلاً :

١. إذا كانت : ص = $س^{2}$ ، ∴ $\frac{د ص}{د س} = 2 س^{2-1} = 2 س$

٢. إذا كانت : ص = $س^{3}$ ، ∴ $\frac{د ص}{د س} = 3 س^{3-1} = 3 س^{2}$

٣. إذا كانت : ص = $س^{5}$ ، ∴ $\frac{د ص}{د س} = 5 س^{5-1} = 5 س^{4}$

٤. إذا كانت : ص = $س^{12}$ ، ∴ $\frac{د ص}{د س} = 12 س^{12-1} = 12 س^{11}$

٥. إذا كانت : ص = $س^{-5}$ ، ∴ $\frac{د ص}{د س} = -5 س^{-5-1} = -5 س^{-6} = \frac{-5}{س^{6}}$

٦. إذا كانت : ص = $\sqrt{س}$ ∴ ص = $س^{\frac{1}{2}}$

∴ $\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{2} س^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} س^{-\frac{1}{2}}$

(٧-٥-٣) الثابت المضروب في دالة :

إذا كانت : ص = د (س) = أ $س^ن$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، أ عدد ثابت ، فإن :

$$\frac{د ص}{د س} = ن أ س^{ن-١}$$

فعلى سبيل المثال :

١. إذا كانت : ص = ٢ س

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = ٢ \times س^{١-١} = ٢ \times س^{صفر} = ٢$$

٢. إذا كانت : ص = ٥ $س^٢$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = ٥ \times ٢ س^{٢-١} = ٥ \times ٢ س = ١٠ س$$

٣. إذا كانت : ص = ٧ $س^٣$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = ٧ \times ٣ س^{٣-١} = ٧ \times ٣ س^٢ = ٢١ س^٢$$

٤. إذا كانت : ص = ٧ $س^٥$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = ٧ \times ٥ س^{٥-١} = ٧ \times ٥ س^٤ = ٣٥ س^٤$$

٥. إذا كانت : ص = $\frac{\sqrt{س}}{٢}$

$$\therefore ص = \frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٤} س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٤ \sqrt{س}}$$

(٧-٥-٥) تفاضل المجموع الجبري لعدة دوال :

تفاضـــل المجمـــوع الجـــبري لعـــدة دوال يســـاوي المجموع الجبري لتفاضلات تلك الدوال ، فإذا وجدت دالتين هما : د (س) ، ل (س) ، فإن

$$\frac{د}{د\,س}[د(س) \pm ل(س)] = \frac{د}{د\,س}[د(س)] \pm \frac{د}{د\,س}[ل(س)]$$

مثال (٦)

إذا كانت : $ص = س^{٥} - ٦س^{٣} + ٨\,س - ٢٥$

المطلوب إيجاد : $\frac{د\,ص}{د\,س}$ ؟.

الحـــل :

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = ٥\,س^{٤} - ٦(\,٣س^{٢}\,) + ٨\,(١) - صفر$$

$$\therefore \frac{د\,ص}{د\,س} = ٥\,س^{٤} - ١٨\,س^{٢} + ٨$$

مثال (٧)

إذا كانت : $ص = \frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٢}}{٢} + ٣\,س - ٥$

المطلوب إيجاد : $\frac{د\,ص}{د\,س}$ ؟.

الحـــل :

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = \frac{٣\,س^{٣-١}}{٣} - \frac{٢\,س^{٢-١}}{٢} + ٣(١) - صفر$$

$$= س^{٢} - س + ٣$$

مثال (٨)

أوجـــد $\frac{د}{د س}\left\{\frac{٨}{٥}(س^٣ + ب س^٢ + جـ)\right\}$

الحـل :

$$\frac{د}{د س}\left\{\frac{٨}{٥}(س^٣ + ب س^٢ + جـ)\right\} =$$

$$= ٣ \times \frac{٨}{٥} \times (س^٢) + ٢ \times \frac{٨}{٥} \times (ب س) + \frac{٨}{٥} \times (\ \ صفر)$$

$$= \frac{٢٤}{٥} س^٢ + \frac{١٦}{٥} ب\ س + صفر$$

(٧-٥-٦) تفاضل حاصل ضرب دالتين :

فبفرض وجود دالتين هما : د (س) ، ل (س) ، فإن :

$$\frac{د}{د س}[د(س) \times ل(س)] = د(س) \times \frac{د}{د س}[ل(س)] + ل(س) \times \frac{د}{د س}[د(س)]$$

أى أن :

$\frac{د ص}{د س}$ = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية

+ الدالة الثانية × مشتقة الدالـــة الأولى .

مثال (٩)

إذا كانت : ص = $(س^٣ - ٣س)(س^٢ + ٢)$

المطلوب إيجاد : $\frac{د ص}{د س}$ ؟

الحــل :

ويمكن التوصل لنفس الحل باستخدام قاعدة الضرب على النحو التالي :

$$\text{ص} = (\text{س}^{٣} - ٣\text{س})(\text{س}^{٢} + ٢)$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = (\text{س}^{٣} - ٣\text{س}) \times ٢\text{س} + (\text{س}^{٢} + ٢) \times (٣\text{س}^{٢} - ٣)$$

$$= ٢\text{س}^{٤} - ٦\text{س}^{٢} + ٣\text{س}^{٤} + ٦\text{س}^{٢} - ٣\text{س}^{٢} - ٦$$

$$= ٥\text{س}^{٤} - ٣\text{س}^{٢} - ٦$$

حل آخر :

$$\text{ص} = (\text{س}^{٣} - ٣\text{س})(\text{س}^{٢} + ٢)$$

$$= \text{س}^{٥} + ٢\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٣} - ٦\text{س}$$

$$= \text{س}^{٥} - \text{س}^{٣} - ٦\text{س}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥\text{س}^{٤} - ٣\text{س}^{٢} - ٦$$

(٧-٥-٧) تفاضل خارج قسمة دالتين :

بفرض وجود دالتين هما : د (س) ، ل (س) ، فإن :

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left[\frac{\text{د(س)}}{\text{ل(س)}}\right] = \left[\frac{\text{ل(س)} \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}\text{د(س)} - \text{د(س)} \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}\text{ل(س)}}{[\text{ل(س)}]^{٢}}\right]$$

أى أن مشتقة خارج قسمة دالتين هي " حاصل ضرب المقام في مشتقة البسط مطروحاً من ذلك حاصل ضرب البسط فى مشتقة المقام ، وكل ذلك مقسوماً على مربع المقام .

أي أن :

تفاضل خارج قسمة دالتين =

$$\frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$$

مثال (١٠)

إذا كانت : $ص = \frac{س}{س^{٢}-١}$ ، المطلوب إيجاد : $\frac{ء ص}{ء س}$ ؟

الحـل :

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{(س^{٢}-١)(١)-(س)(٢ س)}{(س^{٢}-١)^{٢}}$$

$$= \frac{س^{٢}-١-٢ س^{٢}}{س^{٤}-٢س^{٢}+١} = \frac{-س^{٢}-١}{س^{٤}-٢س^{٢}+١}$$

مثال (١١)

إذا كانت : $ص = \frac{س^{٣}}{٢س+٥}$ ، المطلوب إيجاد : $\frac{ء ص}{ء س}$ ؟

الحـل :

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{(٢س+٥)(٣ س^{٢})-(س^{٣})(٢)}{(٢س+٥)^{٢}}$$

$$= \frac{٦ س^{٣}+١٥ س^{٢}-٢ س^{٣}}{(٤س^{٢}+٢٠س+٢٥)} = \frac{٤ س^{٣}+١٥ س^{٢}}{٤س^{٢}+٢٠س+٢٥}$$

مثال (١٢)

إذا كانت : $\text{ص} = \frac{\text{س}^4 - 6\text{س}^2 - 7\text{س} + 5}{\text{س}^2}$ ، المطلوب إيجاد : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ ؟

الحـــل :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س}^2\left(4\text{س}^3 - 12\text{س} - 7\right) - \left(\text{س}^4 - 6\text{س}^2 - 7\text{س} + 5\right)\left(2\text{س}\right)}{\left(\text{س}^2\right)^2}$$

$$= \frac{4\text{س}^5 - 12\text{س}^3 - 7\text{س}^2 - \left(2\text{س}^5 - 12\text{س}^3 - 14\text{س}^2 + 10\text{س}\right)}{\text{س}^4}$$

$$= \frac{4\text{س}^5 - 12\text{س}^3 - 7\text{س}^2 - 2\text{س}^5 + 12\text{س}^3 + 14\text{س}^2 - 10\text{س}}{\text{س}^4}$$

$$= \frac{2\text{س}^5 + 7\text{س}^2 - 10\text{س}}{\text{س}^4}$$

(٧-٥-٨) قاعدة السلسلة

إذا كانت : $\text{ص} = [\text{ل}(\text{س})]^{\text{ن}}$

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}[\text{ل}(\text{س})]^{\text{ن}} = \text{ن}[\text{ل}(\text{س})]^{\text{ن}-1} \times \frac{\text{د}}{\text{د س}}[\text{ل}(\text{س})]$$

وعلى ذلك فإنه يمكن صياغة قاعدة مشتقة دالة الدالة على النحو التالي :

إذا كانت :

$$\text{ص} = (\text{مقدار يحتوي على س})^{\text{ن}}$$

فإن :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{تفاضل القوس} \times \text{تفاضل ما بداخل القوس}$$

مثال (١٣)

إذا كانت : ص = $(س^{٣} - ٣)^{٩}$ ، المطلوب إيجاد : $\frac{د ص}{د س}$ ؟

الحــل :

$$ص = (س^{٣} - ٣)^{٩}$$

$$\frac{د ص}{د س} = ٩ (س^{٣} - ٣)^{٨} \times \frac{د}{د س}(س^{٣} - ٣)$$

$$= ٩ (س^{٣} - ٣)^{٨} (٣ س^{٢})$$

$$= ٢٧ س^{٢} (س^{٣} - ٣)^{٨}$$

مثال (١٤)

إذا كانت : ص = $\frac{١}{(س^{٣} - ٣ س)^{٥}}$ ، المطلوب إيجاد : $\frac{د ص}{د س}$ ؟

الحــل :

$$ص = \frac{١}{(س^{٣} - ٣ س)^{٥}}$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د}{د س}\left\{(س^{٣} - ٣ س)^{-٥}\right\}$$

$$= -٥ (س^{٣} - ٣ س)^{-٦} \times \frac{د}{د س}(س^{٣} - ٣ س)$$

$$= -٥ (س^{٣} - ٣ س)^{-٦} (٣ س^{٢} - ٣)$$

$$= (-١٥ س^{٢} + ١٥) (س^{٣} - ٣ س)^{-٦}$$

(٧-٥-٨) المشتقات العليا للدالة :

مـــن الدوال القابلة للإشتقاق توجد بعض الدوال لا يمكن إيجاد أكثر من مشتقة واحدة لها ، وتوجد بعض الدوال التي يمكن إيجاد أكثر من مشتقة لها ، وتوجــد بعــض الدوال يمكن الحصول منها على عدد لا نهائي من المشتقات ، كما توجد بعض الدوال عدد نهائي من المشتقات .

وبصفة عامة ، إذا كانت الدالة :

ص = $\text{س}^{\text{ن}}$

فإنه توجد حالتان :

١. إذا كانـــت (ن) عدد صحيح موجب ، فإنه يمكن الحصول على (ن+١) مشتقة لهذه الدالة مع ملاحظة أن المشتقة رقم (ن+١) ستساوي صفر

٢. إذا كانـــت (ن) عدد صحيح سالب ، فإنه يمكن الحصول عدد لا نهائي من المشتقات .

ويوجـــد العديد من الرموز التي يمكن الإشارة بها إلى المشتقات العليا ، ولكن من الرموز الشائعة والسهلة الإستخدام هي أنه إذا كانت الدالة هي :

ص = د (س) ، فإنه :

يُرمز للمشتقة الثانية للدالة بالرمز : $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ أو $\overset{=}{\text{ص}}$ أو $\overset{=}{\text{د}}(\text{س})$

ويُرمز للمشتقة الثالثة للدالة بالرمز : $\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}}$ أو $\overset{\equiv}{\text{ص}}$ أو $\overset{\equiv}{\text{د}}(\text{س})$

وهكذا مهما تعددت المشتقات العليا للدالة .

حيـــث نجــد أنه بالمثل قد تكون هنـــاك مشتقات من المرتبة الرابعة ، الخامســـة ، السادسة أو أعلى من ذلك ، ولذلك يُطلق على مثل هذه المشتقات أو العمليات التفاضلية إسم المشتقات العليا للدالة .

مثال (١٥)

إذا كان : $د (س) = ٤س^{٣} - \frac{٢}{س}$

فأوجد المشتقات الأربعة الأولى للدالة ؟.

الحـــل :

يمكن وضع الدالة في الصورة التالية :

$د (س) = ٤س^{٣} - ٢س^{-١}$

$\therefore \overline{د}(س) = ١٢ س^{٢} + ٢ س^{-٢}$

وعلى ذلك فإن :

المشتقة الثانية للدالة هي : $\overline{\overline{د}}(س) = ٢٤ س - ٤ س^{-٣}$

المشتقة الثالثة للدالة هي : $\overline{\overline{\overline{د}}}(س) = ٢٤ + ١٢ س^{-٤}$

المشتقة الرابعة للدالة هي : $\overline{\overline{\overline{\overline{د}}}}(س) = - ٤٨ س^{-٥}$

مثال (١٦)

اذا كان : $\overline{د}(س) = س^{٤} + ٣س^{٢} - ٦$ فأوجد : $\overline{\overline{د}}(٢)$ ، $\overline{\overline{\overline{د}}}(٢)$

الحـــل :

$\because \overline{د}(س) = س^{٤} + ٣س^{٢} - ٦$

$\therefore \overline{\overline{د}}(س) = ٤ س^{٣} + ٦ س$

$\therefore \overline{\overline{د}}(٢) = ٤ (٢)^{٣} + ٦ (٢) = ٣٢ + ١٢ = \boxed{٤٤}$

ومن ناحية ثانية نجد أن :

$\overline{\overline{\overline{د}}}(س) = ١٢ س^{٢} + ٦$

$\therefore \overline{\overline{\overline{د}}}(٢) = ١٢ (٢)^{٢} + ٦ = ٤٨ + ٦ = \boxed{٥٤}$

(٧-٨) التطبيقات التجارية للتفاضل

يمكـن مـن خـلال أساليب التفاضل حل كثير من المشاكل والقضايا الإقتصـادية والتجارية، ومن تلك التطبيقات التجارية والإقتصادية تعظيم الربح وتدنـية التكاليف.كما يمكن من خلال أساليب التفاضل قياس بعض المؤشرات الإقتصـادية مـثل مـرونة الطلـب ومرونة العرض وغير ذلك من المقاييس للتغـيرات الإقتصـادية . وفـيما يلـي نتناول البعض من التطبيقات التجارية والإقتصادية .

(أولاً) مرونة الطلب

إذا كانت : ص = د (س)

فالمقصود بالمرونة بصفة عامة أنها درجة استجابة المتغير التابع (ص) للتغـير فـي المتغـير المسـتقل (س) ، وعلى ذلك إذا كانت (ط) هي الكمية المطلوبـة مـن سـلعة معيـنة ، وكان (س) هو سعر هذه السلعة فإن الكمية المطلوبة تكون دالة في السعر ، أي :

ط = د (س)

وتعـرف مـرونة الطلـب على سلعة معينة بأنها درجة إستجابة الكمية المطلوبة من هذه السلعة للتغير في سعرها مع ثبات العوامل الأخرى .

فإذا كانت :

س١ : سعر السلعة قبل التغير

س٢ : سعر السلعة بعد التغير

ط١ : الكمية المطلوبة عند السعر س١ قبل التغير

ط٢ : الكمية المطلوبة عند السعر س٢ بعد التغير

فيمكن قياس مرونة الطلب بطريقتين مختلفتين ، ونوضح هاتين الطريقتين على النحو التالي :

الطريقة الأولى :

$$\text{مرونة الطلب} = م\,ط = \frac{\text{التغير النسبي في الكمية المطلوبة}}{\text{التغير النسبي في السعر}}$$

$$= \frac{ط_٢ - ط_١}{ط_١} \times ١٠٠ \div \frac{س_٢ - س_١}{س_١} \times ١٠٠$$

الطريقة الثانية

$$\text{مرونة الطلب} = م\,ط = \text{المشتقة الأولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$= \bar{ط}(س) \times \frac{س}{ط} = \frac{ءط}{ءس} \times \frac{س}{ط}$$

ويلاحظ أن مرونة الطلب تأخذ إشارة سالبة لوجود علاقة عكسية بين الطلب والسعر

وتقع قيمة مرونة الطلب في إحدى الحالات التالية :

١. تنحصر بين (١ ، −١) ، وتعنى طلب قليل المرونة
٢. تكون أقل من −١ ، وتعنى طلب كثير المرونة
٣. تأخذ القيمة −١ وهو ما يعنى طلب متكافئ المرونة .

والأمثلة التالية توضح كيفية حساب قيمة مرونة الطلب ، وكيفية تفسير النتيجة المتوصل إليها .

مثال (١)

إذا كانـت العلاقـة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة (ط) وسعر تلك السلعة (س) هي : ط = ٢٠٠ − ١٠ س

فاحسب بطريقتين مختلفتين مرونة الطلب على هـذه السلعـة إذا ارتفع سعـرها من ١٠ جنيهات إلى ١٥ جنيه مع تفسير ما تصل إليه من نتائج .

الحـــل :

الطريقة الأولى :

عند $\text{س}_1 = ١٠$ ∴ $\text{ط}_1 = ١٠٠ - (٥ \times ١٠) = ٥٠$

عند $\text{س}_2 = ١٥$ ∴ $\text{ط}_2 = ١٠٠ - (٥ \times ١٥) = ٢٥$

$$\because \text{م ط} = \frac{\text{ط}_2 - \text{ط}_1}{\text{ط}_1} \times ١٠٠ \div \frac{\text{س}_2 - \text{س}_1}{\text{س}_1} \times ١٠٠$$

$$\therefore \text{م ط} = \frac{٢٥ - ٥٠}{٥٠} \times ١٠٠ \div \frac{١٥ - ١٠}{١٠} \times ١٠٠$$

$= -\frac{١}{٢} \div \frac{١}{٢} = -١$ وهذا يعني أن الطلب متكافئ المرونة ٠

الطريقة الثانية :

$$\because \text{م ط} = \frac{\text{د ط}}{\text{د س}} \times \frac{\text{س}}{\text{ط}}$$

وعند $\text{س} = ١٠$ ∴ $\text{ط} = ١٠٠ - (٥ \times ١٠) = ٥٠$

$$\therefore \text{م ط} = -٥ \times \frac{١٠}{٥٠} = -١$$

وهـذا يعني أن الطلب متكافئ المرونة ٠وهي نفس النتيجة المتوصل إليها في الطريقة الأولى

مثال (٢)

بفرض أن الطلب على سلعة معينة متكافئ المرونة أ وأن الكمية المطلوبة من هذه السلعة (١٠٠) وحدة عند سعر قدره (٢٠) جنيه ، فاحسب معدل تغير الطلب على هذه السلعة بالنسبة إلى سعرها ؟.

الحل :

∵ الطلب متكافئ المرونة

∴ م ط = - ١

∵ $م\,ط = \frac{د\,ط}{د\,س} \times \frac{س}{ط}$

∴ $-١ = \frac{د\,ط}{د\,س} \times \frac{٢٠}{١٠٠}$

∴ معدل تغير الطلب بالنسبة إلى السعر $= \frac{د\,ط}{د\,س} = -١ \times \frac{١٠٠}{٢٠} = -٥$

مثال (٣)

بفرض أن العلاقة بين سعر سلعة معينة (س) والكمية المطلوبة من تلك السلعة (ط) هي :

$س = ٣٠ - \frac{ط}{٥}$

وفي خلال فترة زمنية ارتفع حجم الطلب على هذه السلعة من ٧٥ وحدة إلى ١٠٠ وحدة ، فاحسب بطريقتين مختلفتين مرونة الطلب على هذه السلعة ، مع تفسير ما تصل إليه من نتائج .

الحـــل :

الطريقة الأولى :

عند $ط_1 = ٧٥$ $\therefore س_1 = ٣٠ - \frac{٧٥}{٥} = ١٥$

عند $ط_2 = ١٥$ $\therefore س_2 = ٣٠ - \frac{١٠٠}{٥} = ١٠$

$$\because م\,ط = \frac{ط_2 - ط_1}{ط_1} \times ١٠٠ \div \frac{س_2 - س_1}{س_1} \times ١٠٠$$

$$\therefore م\,ط = \frac{١٠٠ - ٧٥}{٧٥} \times ١٠٠ \div \frac{١٠ - ١٥}{١٥} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٥}{٧٥} \div \frac{-٥}{١٥} = \frac{٢٥}{٧٥} \times \frac{١٥}{-٥} = -١$$

وهذا يعني أن الطلب متكافئ المرونة .

الطريقة الثانية :

$\because س = ٣٠ - \frac{ط}{٥}$ (بالضرب × ٥)

$\therefore ٥\,س = ١٥٠ - ط$

$\therefore ط = ١٥٠ - ٥\,س$ ، $\frac{دط}{دس} = -٥$

$$\because م\,ط = \frac{دط}{دس} \times \frac{س}{ط}$$

وعند $س = ١٥$ $\therefore ط = ١٥٠ - (٥ \times ١٥) = ٧٥$

$\therefore م\,ط = -٥ \times \frac{١٥}{٧٥} = -١$ وهذا يعني أن الطلب متكافئ المرونة .وهي نفس النتيجة المتوصل إليها في الطريقة الأولى

مثال (٤)

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة تأخذ الصورة :

ط (س) = ٤ – س

اوجد مرونة الطلب عند السعر ٠,٨ ، مع تفسير النتيجة ؟.

الحـــل :

$$\therefore م_ط = \frac{د ط}{د س} \times \frac{س}{ط}$$

حيث : $\frac{د ط}{د س} = -١$

وعند س = ٠,٨ $\therefore$ ط = ٤ – ٠,٨ = ٣,٢

$$\therefore م_ط = -١ \times \frac{٠,٨}{٣,٢} = -٠,٢٥$$

وهذا يعني أن الطلب قليل المرونة

(ثانياً) الدخل الحدي ومرونة الطلب

من المعلوم إقتصادياً أن :

- ☐ الدخل الكلي (ي) =

= الكمية المطلوبة من السلعة المعروضة للبيع × سعر السلعة

- ☐ الدخل الحدي = معدل التغير في الدخل الكلي بالنسبة إلى الكمية المطلوبة

$$= \frac{د ي}{د ط}$$

مثال (٥)

إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة (ط) وسعر تلك السلعة (س) هي :

$$ط = ٣\frac{١}{٣} - \frac{١}{٣} س$$

المطلوب :

١. احسب مرونة الطلب على هذه السلعة عند السعر ٧ جنيهات

٢. أوجد بطريقتين مختلفتين الدخل الحدي ؟ .

الحـــل :

<u>إيجاد مرونة الطلب :</u>

نوجد مرونة الطلب على السلعة بمعلومية دالة الطلب وسعر معين على النحو التالي :

$$\therefore م ط = \frac{ء ط}{ء س} \times \frac{س}{ط}$$

وعند س = ٧

$$\therefore ط = ٣\frac{١}{٣} - (\frac{١}{٣} \times ٧) = \frac{١٠}{٣} - \frac{٧}{٣} = ١$$

$$\therefore م ط = - \frac{١}{٣} \times \frac{٧}{١} = - \frac{٧}{٣} = -٢\frac{١}{٣}$$

وهذا يعني أن الطلب كثير المرونة

وهذه النتيجة تعني أن زيادة السعر بمقدار ١٪ سوف يؤدي إلى نقص الطلب على السلعة بما يعادل $٢\frac{١}{٣}$ ٪

إيجاد الدخل الحدي :

ويمكن إيجاد الدخل الحدي بطريقتين مختلفتين كما يلي :

الطريقة الأولى :

$$\because \text{ط} = ٣\frac{١}{٣} - \frac{١}{٣}\text{س}$$

$$\therefore \frac{١}{٣}\text{س} = ٣\frac{١}{٣} - \text{ط} = \frac{١٠}{٣} - \text{ط}$$

$$\therefore \frac{١}{٣}\text{س} = \frac{١٠}{٣} - \text{ط} \quad (\text{بالضرب} \times ٣)$$

$$\therefore \boxed{\text{س} = ١٠ - ٣\,\text{ط}}$$

الدخل الكلي = السعر × الكمية

$$\therefore \text{ي} = \text{س} \times \text{ط}$$

$$\therefore \text{ي} = (١٠ - ٣\,\text{ط}) \times \text{ط}$$

$$\therefore \text{ي} = ١٠\,\text{ط} - ٣\,\text{ط}^{٢}$$

$$\therefore \text{الدخل الحدي} = \frac{\text{د ي}}{\text{د ط}} = ١٠ - ٦\,\text{ط}$$

وحيث أنه عند السعر (س) = ٧ ، وجدنا أن الطلب (ط) = ١

$$\therefore \text{الدخل الحدي} = ١٠ - ٦\,(١) = \boxed{٤}$$

الطريقة الثانية :

$$\text{الدخل الحدي} = \text{السعر}\left(١ + \frac{١}{\text{م}_{\text{ط}}}\right)$$

$$\therefore \text{الدخل الحدي} = ٧\left(١ + \frac{-٣}{٧}\right) = ٧ \times \frac{٤}{٧} = \boxed{٤}$$

ملحوظة :

يمكن إيجاد مرونة الطلب عند سعر معين بطريقة أخرى ، حيث :

$$\text{م ط} = \frac{\text{الدالة الحدية للطلب}}{\text{الدالة المتوسطة للطلب}}$$

مثال (٦)

إذا كانت دالة الطلب تأخذ الصورة :

ط (س) = ١٠٠ − ٢س

أوجد مرونة الطلب عند السعر ١٠ جنيهات ؟

الحـــل :

عند س = ١٠ ∴ ط = ١٠٠ − (٢ × ١٠) = ٨٠

$$\text{الدالة الحدية للطلب} = \bar{\text{ط}}\,(\text{س}) = \frac{\text{د ط}}{\text{د س}} = -٢$$

$$\text{الدالة المتوسطة للطلب} = \frac{\text{ط (س)}}{\text{س}} = \frac{١٠٠ - ٢\text{س}}{\text{س}}$$

$$\therefore \text{مرونة الطلب} = \text{م ط} = -٢ \div \frac{١٠٠ - ٢\text{س}}{\text{س}}$$

$$= -٢ \times \frac{\text{س}}{١٠٠ - ٢\text{س}}$$

وعند السعر س = ١٠

$$\therefore \text{مرونة الطلب} = \text{م ط} = -٢ \times \frac{١٠}{١٠٠ - ٢(١٠)}$$

$$= -٢ \times \frac{١٠}{٨٠} = -٠,٢٥$$ (طلب قليل المرونة)

(ثالثاً) مرونة العرض

مـــرونة العـــرض هي درجة استجابة الكمية المعروضة من السلعة لما يحدث من التغير في سعرها مع إفتراض ثبات العوامل الأخرى .

وعلى ذلك ، فإنه بفرض أن :

$س_1$: سعر السلعة قبل التغير

$س_2$: سعر السلعة بعد التغير

$ع_1$: الكمية المعروضة عند السعر $س_1$ قبل التغير

$ع_2$: الكمية المعروضة عند السعر $س_2$ بعد التغير

يمكن حساب مرونة العرض بطريقتين مختلفتين :

الطريقة الأولى :

$$م\,ع = \frac{\text{التغير النسبي في الكمية المعروضة}}{\text{التغير النسبي في السعر}}$$

$$= \frac{ع_2 - ع_1}{ع_1} \times ١٠٠ \div \frac{س_2 - س_1}{س_1} \times ١٠٠$$

الطريقة الثانية :

$$م\,ع = \text{المشتقة الأولى لدالة العرض} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المعروضة}}$$

$$= \bar{ع}(س) \times \frac{س}{ع} = \frac{د\,ع}{د\,س} \times \frac{س}{ع}$$

وتـــأخذ مـــرونة العـــرض إشـــارة موجـــبة حيث أن العلاقة بين الكمية المعروضة والسعر علاقة طرديه .

مثال (٧)

إذا كانت العلاقة بين الكمية المعروضة من سلعة معينة (ع) وسعر هذه السلعة (س) يمكن تمثيلها بالدالة التالية :

$$ع = ٣ س - ١$$

والمطلوب إيجاد مرونة عرض السلعة إذا انخفض سعرها من ٢٠ جنيها إلى ١٥ جنيها ؟.

الحل :

عند $س_١ = ٢٠$ ∴ $ع_١ = ٣ (٢٠) - ١ = ٥٩$

عند $س_٢ = ١٥$ ∴ $ع_٢ = ٣ (١٥) - ١ = ٤٤$

$$∵ م ع = \frac{ع_٢ - ع_١}{ع_١} \times ١٠٠ \div \frac{س_٢ - س_١}{س_١} \times ١٠٠$$

$$∴ م ع = \frac{٤٤ - ٥٩}{٥٩} \times ١٠٠ \div \frac{١٥ - ٢٠}{٢٠} \times ١٠٠$$

$$= \frac{-١٥}{٥٩} \div \frac{-٥}{٢٠} = \frac{٦٠}{٥٩} = \boxed{١,٠٢}$$

مثال (٨)

إذا كانت العلاقة بين الكمية المعروضة من سلعة معينة (ع) وسعر هذه السلعة (س) هي :

$$ع (س) = س^٢$$

والمطلوب إيجاد :

(١) مرونة عرض السلعة إذا انخفض سعرها من ٢٥ جنيها إلى ٢٠ جنيها ؟.

(٢) مرونة عرض السلعة عند السعر ١٠ ؟.

الحـــل :

(أولاً) إيجاد مرونة العرض إذا انخفض سعرها من ٢٥ جنيها إلى ٢٠ جنيها :

عند $س_١ = ٢٥$　　　$\therefore ع_١ = (٢٥)^٢ = ٦٢٥$

عند $س_٢ = ٢٠$　　　$\therefore ع_٢ = (٢٠)^٢ = ٤٠٠$

$$\because م\,ع = \frac{ع_٢ - ع_١}{ع_١} \times ١٠٠ \div \frac{س_٢ - س_١}{س_١} \times ١٠٠$$

$$\therefore م\,ع = \frac{٤٠٠ - ٦٢٥}{٦٢٥} \times ١٠٠ \div \frac{٢٠ - ٢٥}{٢٥} \times ١٠٠$$

$$= \frac{-٢٢٥}{٦٢٥} \div \frac{-٥}{٢٥} = \frac{٥٦٢٥}{٣١٢٥} = \boxed{١,٨}$$

(ثانياً) مرونة العرض عند السعر ١٠ :

عند $س = ١٠$　　　$\therefore ع = (١٠)^٢ = ١٠٠$

$$\because \text{مرونة العرض} = م\,ع = \frac{دع}{دس} \times \frac{س}{ع}$$

$$\because \frac{دع}{دس} = ٢\,س$$

$$\therefore م\,ع = ٢\,س \times \frac{١٠}{١٠٠} = ٢٠ \times \frac{١٠}{١٠٠} = \boxed{٢}$$

مثال (٩)

اذا كانت دالة العرض لسلعة معينة هى

$$ع\,(س) = ٢٠\,س^٣$$

فـأوجد مـرونة العـرض على مدى السعر من ٧ إلى ٨ وحدات نقدية للوحدة من السلعة . ثم أوجد كذلك المرونة عند السعر ٧ وحدات نقدية للوحدة من السلعة .

الحـــل :

(أولاً) مرونة العرض عند تغير السعر من ٧ إلى ٨ وحدات نقدية :

عند $س_١ = ٧$

$\therefore ع_١ = ٢٠ \times ٧^٣ = ٢٠ \times ٣٤٣ = ٦٨٦٠$

عند $س_٢ = ٨$

$\therefore ع_٢ = ٢٠ \times ٨^٣ = ٢٠ \times ٥١٢ = ١٠٢٤٠$

$$\because م ع = \frac{ع_٢ - ع_١}{ع_١} \times ١٠٠ \div \frac{س_٢ - س_١}{س_١} \times ١٠٠$$

$$\therefore م ع = \frac{١٠٢٤٠ - ٦٨٦٠}{٦٨٦٠} \times ١٠٠ \div \frac{٨ - ٧}{٧} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣٣٨٠}{٦٨٦٠} \div \frac{١}{٧} = \frac{٢٣٦٦٠}{٦٨٦٠} = \boxed{٣,٤٥}$$

(ثانياً) إيجاد المرونة عند السعر ٧ وحدات نقدية :

عند $س = ٧$ $\therefore ع = ٢٠ \times ٧^٣ = ٦٨٦٠$

$$\because \text{مرونة العرض} = م ع = \frac{د ع}{د س} \times \frac{س}{ع}$$

$$\because \frac{د ع}{د س} = ٦٠ س^٢$$

$$\therefore م ع = ٦٠ س^٢ \times \frac{٧}{٦٨٦٠} = ٦٠ (٤٩) \times \frac{٧}{٦٨٦٠} = \boxed{٣}$$

وهـذا يعـنى أنـه أي تغـير طفيف فى السعر سيؤدى إلى تغير الكمية المعروضة بمقدار ٣ أمثال التغير فى السعر .

(رابعاً) الدخل بين الإستهلاك والإستثمار :

يتوزع الدخل دائما بين الإستهلاك والإستثمار (الإدخار)، حيث :

الدخل = الإستهلاك + الإستثمار

وتؤدي الزيادة في مستوى الدخل إلى زيادة الإستهلاك وإرتفاع حجم الإستثمار ، ويتوقف ذلك على أمور عديدة أهمها المستوى المعيشي والثقافي لأفراد المجتمع وميولهم المختلفة للإستهلاك أو الإدخار .

وفي هذا التطبيق سنلقي الضوء على النقاط التالية :

١. الميل الحدي للإستهلاك .
٢. الميل الحدي للإدخار .
٣. مضاعف الإستثمار .

(١) الميل الحدي للإستهلاك (م.ح.ك) :

مما سبق يتبين لنا أن الإستهلاك (ك) دالة في الدخل (ي) ، أي أن :

ك = د (ي)

فالميل الحدي للإستهلاك (م.ح.ك) هو المشتقة الأولى لدالة الإستهلاك ، أي هو معدل التغير اللحظي في الإستهلاك نتيجة حدوث تغير طفيف جداً في الدخل ، وعلى ذلك :

الميل الحدي للإستهلاك (م.ح.ك) = $\frac{\text{د ك}}{\text{د ي}}$

ونجد أن الميل الحدي للإستهلاك (م.ح.ك) يكون في صورة كسر يتراوح بين الصفر والواحد الصحيح .

(٢) الميل الحدي للإدخار (م٠ح٠ر) :

مما سبق يتبين لنا أيضاً أن الإدخار (ر) دالة في الدخل (ي) ، أي أن :

ر = د (ي)

فالمـيل الحدي للإدخار (م٠ح٠ر) هو المشتقة الأولى لدالة الإدخار ، أي هو معـدل التغـير اللحظي في الإدخار نتيجة حدوث تغير طفيف جداً في الدخل ، وعلى ذلك :

الميل الحدي للإدخار (م٠ح٠ر) = $\frac{\text{ءر}}{\text{ءي}}$

ونجد أن الميل الحدي للإدخار (م٠ح٠ر) أيضاً يكون في صورة كسر يتراوح بيـن الصفر والواحد الصحيح ٠ونجد أن أي زيادة في الميل الحدي للإستهلاك يترتب عليها نقص في الميل الحدي للإدخار ، حيث :

الميل الحدي للإستهلاك + الميل الحدي للإدخار = ١

(٣) مضاعف الإستثمار (م٠ر) :

يـتوقف حجم الإستثمار في المجتمع على عدة عوامل أهمها مستوى الدخل ، وميل الأفراد إلى الإتجاه نحو الإستثمار ، وغير ذلك ، وهذا يؤدي إلى إرتفاع حجم الإستثمار الذي يؤدي بدوره في النهاية إلى إرتفاع مستوى الدخل ، ومن ثم توجد علاقة تأثير متبادلة بين الدخل والإستثمار ٠

ويُسمى مقدار الزيادة النهائية في الدخل نتيجة إرتفاع حجم الإستثمار بمضاعف الإستثمار ، ويكون :

مضاعف الإستثمار = م٠ر = $\frac{١}{\text{م٠ح٠ر}}$ أو = $\frac{١}{١-(\text{م٠ح٠ك})}$

مثال (١٠)

إذا كانت العلاقة بين الإستهلاك (ك) والدخل (ي) هي :

$$ك = ١٠ + ٠,٨ ي - \sqrt{ي}$$

أوجد الميل الحدي للإستهلاك ، والميل الحدي للإدخار عند مستوى دخل (٤٠٠) جنيه ، واستنتج من ذلك مضاعف الإستثمار ؟.

الحل :

$$\because ك = ١٠ + ٠,٨ ي - \sqrt{ي}$$

$$\therefore ك = ١٠ + ٠,٨ ي - ي^{\frac{١}{٢}}$$

$$\because \text{الميل الحدي للإستهلاك} (م.ح.ك) = \frac{ء ك}{ء ي}$$

$$\therefore م.ح.ك = ٠,٨ - \frac{١}{٢} ي^{-\frac{١}{٢}}$$

$$= ٠,٨ - \frac{١}{٢\sqrt{ي}}$$

$$= ٠,٨ - \frac{١}{٢\sqrt{٤٠٠}}$$

$$= ٠,٨ - \frac{١}{٤٠} = ٠,٨ - ٠,٠٢٥ = ٠,٧٧٥$$

$$\because \text{الميل الحدي للإدخار} (م.ح.ر) = ١ - \text{الميل الحدي للإستهلاك}$$

$$\therefore م.ح.ر = ١ - ٠,٧٧٥ = ٠,٢٢٥$$

$$\text{مضاعف الإستثمار} = م.ر = \frac{١}{م.ح.ر} = \frac{١}{٠,٢٢٥} = ٤,٤$$

مثال (١١)

إذا كانت العلاقة بين الإستهلاك (ك) والدخل (ي) هي :

$$ك = ٢٠ + ٠,٦ ي - \sqrt[٣]{ي^٢}$$

أوجد الميل الحدي للإستهلاك ، والميل الحدي للإدخار عند مستوى دخل (١٠٠٠) جنيه ، واستنتج من ذلك مضاعف الإستثمار ؟٠

الحل :

$$\because ك = ٢٠ + ٠,٦ ي - \sqrt[٣]{ي^٢}$$

$$\therefore ك = ٢٠ + ٠,٦ ي - ي^{\frac{٢}{٣}}$$

$$\therefore م٠ح٠ك = \frac{ءك}{ءي} = ٠,٦ - \frac{٢}{٣} ي^{-\frac{١}{٣}}$$

$$= ٠,٦ - \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{ي}}$$

$$= ٠,٦ - \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{١٠٠٠}}$$

$$= ٠,٦ - \frac{٢}{٣٠} = ٠,٦ - ٠,٠٧ = \boxed{٠,٥٣}$$

$\because$ الميل الحدي للإدخار (م٠ح٠ر) =١ - الميل الحدي للإستهلاك

$$\therefore م٠ح٠ر = ١ - ٠,٥٣ = \boxed{٠,٤٧}$$

$$مضاعف الإستثمار = م٠ر = \frac{١}{م٠ح٠ر} = \frac{١}{٠,٤٧} = \boxed{٢,١٣}$$

مثال (١٢)

بفـرض أن مضاعف الإستثمار في مجتمع ما يساوي (٢,٥) ، أوجد الميل الحدي للإستهلاك ، والميل الحدي للإدخار في ذلك المجتمع ؟.

الحـل :

∵ مضاعف الإستثمار = م٠ر = $\frac{١}{م٠ح٠ر}$

∴ ٢,٥ = $\frac{١}{م٠ح٠ر}$

∴ م٠ح٠ر = $\frac{١}{٢,٥}$ = ٠,٤

∴ الميل الحدي للإدخار في المجتمع = ٤٠٪

ومن ناحية أخرى :

∵ الميل الحدي للإستهلاك (م٠ح٠ك) =١ - الميل الحدي للإدخار

∴ م٠ح٠ك = ١ - ٠,٤ = ٠,٦

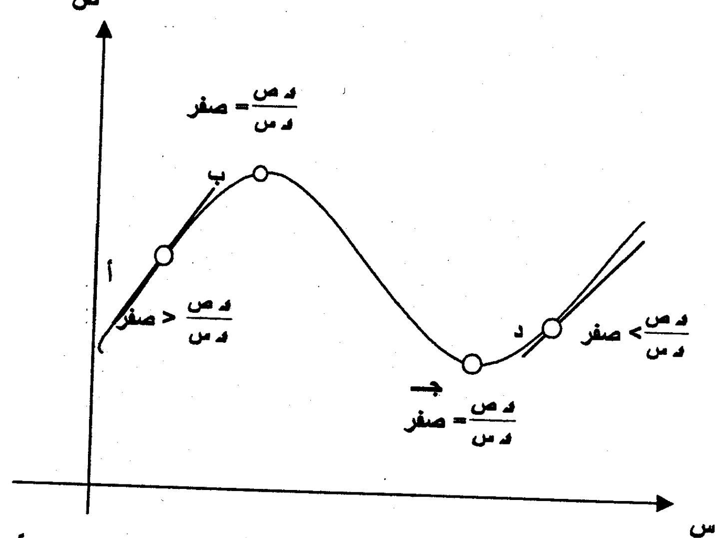
∴ الميل الحدي للإستهلاك في المجتمع = ٦٠٪

وعلـى هـذا الأساس يمكن القول بأن ذلك المجتمع هو مجتمع إستهلاكي لأنه يوجـه الجـزء الأكـبر من الدخل (ي) وهو ٦٠ ٪ نحو الإستهلاك ، والباقي وقدره ٤٠٪ يتم توجيهه نحو الإدخار أو الإستثمار .

(٧-٩) النهايات العظمى والصغرى :

يكون للدالة : ص = د (س) نهاية عظمى عند قيمة معينة للمتغير (س) [ولتكن س١ مثلاً] إذا كانت قيمة هذه الدالة عند هذه النقطة أكبر من قيمتها عند جميع النقط داخل فترة معينة تحتوي على القيمة س١ . وبالمثل يكون للدالة : ص = د (س) نهاية صغرى عند قيمة معينة للمتغير (س) [ولتكن س٢ مثلاً] إذا كانت قيمة هذه الدالة عند هذه النقطة أصغر من قيمتها عند جميع النقط داخل فترة معينة تحتوي على القيمة س٢ .

فإذا إفترضنا أن منحنى الدالة : ص = د (س) ، يأخذ الشكل التالي :



ونلاحظ من الشكل السابق أن المنحنى في الجزء الأول منه تصاعدياً ، حيث تتزايد قيمة (ص) بتزايد قيم (س) ، وتكون خطوط التماس للمنحنى

ذات ميل موجب [أي تصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات] وبالتالي فإن $\frac{د ص}{د س}$ تكون موجبة ، والمشتقة الموجبة تعنى أن المنحنى يكون فى حالة تصاعد كما هو الحال عند النقطة (أ) .

وتستمر قيم (ص) في التصاعد حتى تصل إلى النقطة (ب) ثم تتناقص قيم (ص) بعدها بالرغم من تزايد قيم (س) ، وتكون خطوط التماس ذات ميل سالب [أي تصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات] ، وبالتالي فإن $\frac{د ص}{د س}$ يكون سالب ، والمشتقة السالبة تعنى أن المنحنى فى حالة هبوط

ويشير سلوك المنحنى قبل وبعد النقطة (ب) إلى أن لهذا المنحنى نهاية عظمى عند هذه النقطة ، فالنقطة (ب) أعلى من أي نقطة مجاورة لها سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار ، أى أنه توجد قمة عند النقطة (ب) ، وهذه النقطة تُسمى نقطة نهاية عظمى ، وهي النقطة التي عندها تتحول الدالة من دالة تزايدية إلى دالة تناقصية ، أي يتحول ميل المماس من موجب إلى سالب . وعند نقطة النهاية العظمى يكون : $\frac{د ص}{د س}$ = صفر أي أن المماس يوازي محور السينات ، وهذا يمثل شرط ضروري ، والشرط الكافي يتمثل في أن $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ < صفر .

وتستمر قيم (ص) في الهبوط حتى تصل للنقطو (جـ) ، ويشير سلوك المنحنى قبل وبعد النقطة (جـ) إلى أن لهذا المنحنى نهاية صغرى عند هذه النقطة ، فالنقطة (جـ) أدنى من أي نقطة مجاورة لها سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار ، أي أنه يوجد قاع عند النقطة (جـ) ، وهذه النقطة

تُسمى نقطة نهاية صغرى ، وهي النقطة التي عندها تتحول الدالة من دالة تناقصية إلى دالة تزايدية ، أي يتحول ميل المماس من سالب إلى موجب ٠

وعند نقطة النهاية الصغرى يكون $\frac{دص}{دس}$ = صفر أي أن المماس يوازي محور السينات ، وهذا يمثل شرط ضروري أيضاً كما هو الحال في نقطة النهاية العظمى ، والشرط الكافي يتمثل في أن $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ > صفر ٠

ومن هنا يمكن تلخيص خطوات تحديد النهايات العظمى والصغرى في النقاط التالية :

(١) نوجد المشتقة الأولى للدالة ، أي نوجد $\frac{دص}{دس}$ ٠

(٢) نضع $\frac{دص}{دس}$ = صفر ، ومنها نوجد قيم (س) والتي تُسمى بالقيم الحرجة .

(٣) نوجد المشتقة الثانية للدالة ، أي نوجد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ ٠

(٤) نعوض بقيم (س) الناتجة في الخطوة الثانية في $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ ، فإذا كانت نتيجة التعويض كمية سالبة يكون للمنحنى نهاية عظمى عند النقطة (س ، ص) ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية يمكن إيجاد قيمة (ص)٠ وإذا كانت نتيجة التعويض كمية موجبة يكون للمنحنى نهاية صغرى عند النقطة (س ، ص) ، حيث يتم التعويض في الدالة الرئيسية حتى يمكن إيجاد قيمة (ص) في النقطة المطلوبة ٠

مثال (١)

أوجد نقاط النهاية العظمى والنهاية الصغرى للدالة

$$ص = ٢ س^{٣} - ٣ س^{٢} - ١٢ س$$

الحـــل :

(أولاً) نوجد المشتقة الأولى للدالة =

$$\frac{د ص}{د س} = ٦ س^{٢} - ٦ س - ١٢$$

(ثانياً) بوضع $\frac{د ص}{د س}$ **= صفر ، ومنها نوجد قيم س**

$\therefore$ ٦ س^{٢} - ٦ س - ١٢ = صفر (بالقسمة على ٦)

$\therefore$ س^{٢} - س - ٢ = صفر

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ}$$

$$\therefore س = \frac{-(-١) \pm \sqrt{(-١)^{٢} - ٤(١)(-٢)}}{٢(١)}$$

$$\therefore س = \frac{١ \pm \sqrt{٩}}{٢}$$

إما س = ٢ أو س = -١

(ثالثاً) نوجد المشتقة الثانية للدالة =

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ١٢ س - ٦$$

(رابعــاً) بالتعويض بقيم (س) الناتجة في الخطوة الثانية في $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ **، نجد أن :**

١- عند س = ٢ ، يكون :

$$\frac{د^٢ص}{د س^٢} = ١٢ (٢) - ٦ = + ١٨ = \text{كمية موجبة}$$

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س= + ٢ ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = + ٢ ، يكون :

$$ص = ٢ (٢)^٣ - ٣ (٢)^٢ - ١٢(٢)$$

$$= ١٦-١٢ - ٢٤ = - ٢٠$$

∴ نقطة النهاية الصغرى للدالة هي (٢ ، -٢٠)

٢- عند س = - ١ ، يكون :

$$\frac{د^٢ص}{د س^٢} = ١٢ (-١) - ٦ = - ١٨ = \text{كمية سلبة}$$

∴ يوجد نقطة نهاية عظمى للدالة عند س= - ١ ، ولإيجاد الإحداثي الصادي للنقطة نعوض في الدالة الرئيسية عن س = - ١ ، وعندها يكون :

$$ص = ٢ (-١)^٣ - ٣ (-١)^٢ - ١٢(-١) = -٢-٣ + ١٢ = ٧$$

∴ نقطة النهاية العظمى للدالة هي (-١ ، ٧)

مثال (٢)

أوجد نقاط النهايات العظمى والصغرى للدالة :

$$ص = س^٣ - ١٢س + ٣$$

الحـل :

(أولاً) نوجد المشتقة الأولى للدالة =

$$\frac{د ص}{د س} = ٣ س^٢ - ١٢$$

(ثانياً) بوضع $\frac{د ص}{د س}$ = صفر ، ومنها نوجد قيم س

∴ ٣ س^{٢} − ١٢ = صفر (بالقسمة على ٣)

∴ س^{٢} − ٤ = صفر

∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = $\sqrt{٤}$

إما س = ٢ أو س = −٢

(ثالثاً) نوجد المشتقة الثانية للدالة ، حيث : $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ٦ س

(رابعاً) بالتعويض بقيم (س) الناتجة في الخطوة الثانية في $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ ، فإن :

١− عند س = ٢ ، يكون :

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ٦ (٢) = + ١٢ = كمية موجبة .

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س= ٢ ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = ٢ ، يكون :

ص = (٢)^{٣} − ١٢ (٢) + ٣ = ٨ − ٢٤ + ٣ = − ١٣

∴ نقطة النهاية الصغرى للدالة هي (٢ ، −١٣)

٢− عند س = − ٢ ، يكون :

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ٦ (−٢) = − ١٢ = كمية سلبة .

∴ يوجد نقطة نهاية عظمى للدالة عند س= − ٢ ، وعندها يكون :

ص = (−٢)^{٣} − ١٢ (−٢) + ٣ = −٨ + ٢٤ + ٣ = + ١٩

∴ نقطة النهاية العظمى للدالة هي (−٢ ، ١٩)

مثال (٣)

أوجد النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة

ص = س^{٣} − ٩س^{٢} + ٢٤س

الحـــل :

(أولاً) نوجد المشتقة الأولى للدالة =

$\overline{\text{ص}}$ = ٣س^{٢} − ١٨س + ٢٤

(ثانياً) نحدد القيم الحرجة بإيجاد قيم س عندما يكون : $\overline{\text{ص}}$ = صفر

∴ ٣س^{٢} − ١٨س + ٢٤ = صفر

٣ (س^{٢} − ٦س + ٨) = صفر

٣ (س − ٢) (س − ٤) = صفر

∴ القيم الحرجة هي : س = ٢ ، أو س = ٤ وهما يقعان داخل الفترة المطلوبة ٠

(ثالثاً) نوجد المشتقة الثانية للدالة =

$\overline{\overline{\text{ص}}}$ = ٦ س − ١٨

(رابعاً) بالتعويض بقيم (س) في $\overline{\overline{\text{ص}}}$ نجد أن :

١− عند س = ٢ ، يكون :

$\overline{\overline{\text{ص}}}$ = ٦(٢) − ١٨ = − ٦ = كمية سالبة ٠

∴ يوجـد نقطة نهاية عظمى للدالة عند س= ٢ ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = ٢ ، يكون :

ص = (٢)^{٣} − ٩ (٢)^{٢} + ٢٤(٢)

= ٨ − ٣٦ + ٤٨ = + ٢٠

∴ نقطة النهاية العظمى للدالة هي (٢ ، ٢٠)

٢- عند س = ٤ ، يكون : س^٣ - ٩س^٢ + ٢٤س

ص̿ = ٦(٤) - ١٨ = + ٦ = كمية موجبة ٠

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س= ٤ ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = ٤ ، يكون :

ص = (٤)^٣ - ٩ (٤)^٢ + ٢٤(٤)

= ٦٤ - ١٤٤ + ٩٦ = + ١٦

∴ نقطة النهاية العظمى للدالة هي (٤ ، ١٦)

مثال (٤)

أوجد النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة :

ص = س^٤ - ١٨ س^٢

الحـــل :

(أولاً) نوجد المشتقة الأولى للدالة =

ص̄ = ٤س^٣ - ٣٦ س

(ثانياً) نحدد القيم الحرجة بإيجاد قيم س عندما يكون : ص̄ = صفر

∴ ٤س^٣ - ٣٦ س = صفر

٤س (س^٢ - ٩) = صفر

٤س (س - ٣) (س + ٣) = صفر

∴ القيم الحرجة هي : س = صفر ، أو س = ٣ ، أو س = -٣

(ثالثاً) نوجد المشتقة الثانية للدالة = س^٤ - ١٨ س^٢

ص̿ = ١٢ س^٢ - ٣٦

(رابعــاً) بالــتعويض بقيم (س) الناتجة من القيام بالخطوة الثانية في ص̿ نجد أن :

١- عند س = صفر ، يكون :

$\overline{\overline{ص}}$ = ١٢(صفر)^{٢} – ٣٦ = – ٣٦ = كمية سالبة ٠

∴ يوجد نقطة نهاية عظمى للدالة عند س= صفر ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = صفر ، يكون :

ص = (صفر)^{٤} – ١٨ (صفر)^{٢}

= صفر

∴ يوجد نقطة نهاية عظمى للدالة عند س = صفر وهي (صفر ، صفر)

٢- عند س = ٣ ، يكون :

$\overline{\overline{ص}}$ = ١٢(٣)^{٢} – ٣٦ = ٧٢

= كمية موجبة ٠

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س= ٣ ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = ٣ ، يكون :

ص = (٣)^{٤} – ١٨ (٣)^{٢}

= ٨١ – ١٦٢ = – ٨١

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س = ٣ وهي (٣ ، ٨١)

٢- عند س = –٣ ، يكون :

$\overline{\overline{د}}$(س) = ١٢(–٣)^{٢} – ٣٦ = ٧٢ = كمية موجبة ٠

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س= –٣ ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = –٣ ، يكون :

ص = (–٣)^{٤} – ١٨ (–٣)^{٢}

= ٨١ – ١٦٢ = – ٨١

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س = ٣ وهي (–٣ ، ٨١)

مثال (٥)

أوجد النهايات العظمى المحلية والنهايات الصغرى للدالة :

ص = س٣ ــ ٣ س٢

الحــل :

(أولاً) نوجد المشتقة الأولى للدالة ، حيث ص̅ = ٣ س٢ ــ ٦س

(ثانياً) نحدد القيم الحرجة بإيجاد قيم س بوضع ص̅ = صفر

∴ ٣س٢ ــ ٦س = صفر

٣س (س ــ ٢)= صفر

∴ إما : س = صفر ، أو س = ٢

(ثالثاً) نوجد المشتقة الثانية للدالة ، حيث : ص̿ = ٦ س ــ ٦

(رابعاً) بالتعويض بقيم (س) في ص̿ نجد أن :

١- عند س = صفر ، يكون :

ص̿ = ٦(صفر) – ٦ = – ٦ = كمية سالبة ٠

∴ يوجــد نقطة نهاية عظمى للدالة عند س= صفر ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = صفر ، يكون :

ص = (صفر)٣ – ٣ (صفر)٢ = صفر

∴ يوجد نقطة نهاية عظمى للدالة عند س = صفر وهي (صفر ، صفر)

٢- عند س = ٢ ، يكون :

ص̿ = ٦(٢) – ٦ = + ٦ = كمية موجبة ٠

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س = ٢ ، وعندها يكون :

ص = (٢)٣ – ٣ (٢)٢ = ٨ – ١٢ = – ٤

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س = ٢ وهي (٢ ، –٤)

مثال (٦)

أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة:

ص = س^٤ – ٢س^٢ + ١٠

الحـــل :

(أولاً) نوجد المشتقة الأولى للدالة ، حيث :

ص̅ = ٤س^٣ – ٤س

(ثانياً) نوجد قيم س بوضع ص̅ = صفر

∴ ٤س^٣ – ٤س = صفر

٤س(س^٢ – ١) = صفر

٤س (س – ١) (س + ١) = صفر

∴ القيم الحرجة هي : س = صفر ، أو س = ١ ، أو س = -١

(ثالثاً) نوجد المشتقة الثانية للدالة :

ص̿ = ١٢ س^٢ – ٤

(رابعاً) بالتعويض بقيم (س) في ص̿ نجد أن :

١- عند س = صفر ، يكون :

ص̿ = ١٢ (صفر)^٢ – ٤ = – ٤ = كمية سالبة ٠

∴ يوجـد نقطـة نهاية عظمى للدالة عند س= صفر ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = صفر ، يكون :

ص = (صفر)^٤ – ٢ (صفر)^٢ + ١٠ = ١٠

∴ يوجد نقطة نهاية عظمى للدالة عند س = صفر وهي (صفر ، ١٠)

٢- عند س = ١ ، يكون :

$\overline{\overline{ص}}$ = ١٢ (١)^{٢} − ٤ = +٨ = كمية موجبة .

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س= ١ ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = ١ ، يكون :

ص = (١)^{٤} − ٢ (١)^{٢} + ١٠ = ٩

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س = ١ وهي (١ ، ٩)

٣- عند س = −١ ، يكون :

$\overline{\overline{ص}}$ = ١٢ (−١)^{٢} − ٤ = +٨ = كمية موجبة .

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س= −١ ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = −١ ، يكون :

ص = د(س) = (−١)^{٤} − ٢ (−١)^{٢} + ١٠ = ٩

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س = ١ وهي (−١ ، ٩)

مثال (٧)

أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة :

ص = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩ س + ٦

الحل :

(أولاً) نوجد المشتقة الأولى للدالة ، حيث : $\overline{ص}$ = ٣س^{٢} − ١٢س + ٩

(ثانياً) نحدد قيم س بوضع $\overline{ص}$ = صفر

∴ ٣س^{٢} − ١٢س + ٩ = صفر

٣ (س^{٢} − ٤س + ٣) = صفر

٣ (س − ١) (س − ٣) = صفر

∴ أما : س = ١ ، أو س = ٣

(ثالثاً) نوجد المشتقة الثانية للدالة :

$\overline{\overline{ص}}$ = ٦ س − ١٢

(رابعاً) بالتعويض بقيم (س) الناتجة في $\overline{\overline{ص}}$ نجد أن :

١- عند س = ١ ، يكون :

$\overline{\overline{ص}}$ = ٦ (١) − ١٢ = − ٦

= كمية سالبة ٠

∴ يوجد نقطة نهاية عظمى للدالة عند س= ١ ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = ١ ، يكون :

ص = $(١)^{٣}$ − ٦ $(١)^{٢}$ + ٩ (١) + ٦ = ١٠

∴ يوجد نقطة نهاية عظمى للدالة عند س = ١ وهي : (١ ، ١٠)

٢- عند س = ٣ ، يكون :

$\overline{\overline{ص}}$ = ٦ (٣) − ١٢ = + ٦

= كمية موجبة ٠

∴ يوجد نقطة نهاية صغرى للدالة عند س= ٣ ، وبالتعويض في الدالة الرئيسية عن س = ٣ ، يكون :

ص = $(٣)^{٣}$ − ٦ $(٣)^{٢}$ + ٩ (٣) + ٦ = ٦

∴ نقطة النهاية الصغرى للدالة هي : (٣ ، ٦)

التطبيقات التجارية للتفاضل والنهايات العظمى والصغرى

بفرض أن :

ي : الإيراد الكلي من إنتاج وبيع (س) وحدة

ع : سعر بيع الوحدة ٠

ك : التكلفة الكلية لإنتاج الكمية (س) ٠

ر : صافي الربح المحقق من إنتاج وبيع (س) وحدة ٠

فيكون:

(١) الإيراد الكلي = الكمية المباعة × سعر بيع الوحدة

ي = س × ع

(٢) صافي الربح = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

ر = ي – ك

(٣) الإيراد الحدي : هو معدل التغير اللحظي في الإيراد الكلي نتيجة حدوث تغير طفيف جداً في الكمية المباعة ، وبذلك :

$$\text{الإيراد الحدي} = \frac{\text{ءي}}{\text{ءس}}$$

(٤) التكلفة الحدية : هي معدل التغير اللحظي في التكاليف الكلية نتيجة حدوث تغير طفيف جداً في الكمية المنتجة ، وبذلك :

$$\text{التكلفة الحدية} = \frac{\text{ءك}}{\text{ءس}}$$

(٥) يتحقق أقصى ربح ممكن عندما تتساوى التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي

أي عندما : $\frac{\text{ءك}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءي}}{\text{ءس}}$

ويؤكد ذلك أن تكون المشتقة الثانية لدالة الربح أقل من الصفر (كمية سالبة) عند قيمة س التي تحقق التساوي السابقة بين التكلفة الحدية والإيراد الحدي .

من الجدير بالذكر أنه طالما أن : $\frac{\text{د ي}}{\text{د س}} > \frac{\text{د ك}}{\text{د س}}$ ، فيمكن إنتاج وبيع وحدات إضافية من المنتج ، أما إذا كانت : $\frac{\text{د ي}}{\text{د س}} < \frac{\text{د ك}}{\text{د س}}$ ، فعندئذ يجب التوقف عن إنتاج هذه الوحدة الإضافية .

(٦) التكلفة المتوسطة = $\frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{عدد الوحدات المنتجة}} = \frac{\text{ك}}{\text{س}}$

(٧) الإيراد المتوسط = $\frac{\text{الإيراد الكلي}}{\text{عدد الوحدات المباعة}} = \frac{\text{ي}}{\text{س}}$

(٨) ويجب ملاحظة أن :

النهاية الصغرى لدالة التكلفة المتوسطة = التكلفة الحدية

وفيما يلي نتناول بالدراسة التطبيقية على التحليل الحدي لأهم المتغيرات الاقتصادية من تكاليف وإيراد وأرباح ، وذلك في صورة مجموعة من التمارين والتطبيقات على النحو التالي .

التطبيق (١)

شركة الصفا لإنتاج الخزف يمكنها أن تبيع س وحـدة في الشهر بسعر قـدره [ع = ٢٠٠ - ٠,٢ س] حيث ع يمثل سعر بيع الوحـدة ، وأن التكاليف الكلية تتحدد بالعلاقة التالية :

ت = ٥٠ س + ١٠٠٠٠

والمطلوب إيجاد :

(١) عـدد الوحـدات س الذي تنتجه الشركة لتحقيق أكبر ربح ممكن وتحديد مقدار هذا الربح ؟

(٢) سعر بيع الوحدة في ظل النهاية العظمى للربح ؟

الحـل :

(أولاً) تحديـد عـدد الوحـدات (س) الذي تنتجه الشركة لتحقيق أكبر ربح ممكن وتحديد مقدار هذا الربح :

الإيراد الكلي = عدد الوحدات × سعر بيع الوحدة

∴ الإيراد الكلي = س × ع

= س (٢٠٠ - ٠,٢ س)

= ٢٠٠ س - ٠,٢ س^{٢}

التكاليف الكلية = ت = ٥٠ س + ١٠٠٠٠

الربح الكلي ر = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

∴ ر = ٢٠٠ س - ٠,٢ س^{٢} - (٥٠ س + ١٠٠٠٠)

∴ ر = ٢٠٠ س - ٠,٢ س^{٢} - ٥٠ س - ١٠٠٠٠

∴ ر = ١٥٠ س - ٠,٢ س^{٢} - ١٠٠٠٠

دالة الربح الكلي هي :

ر = − ٠,٠٢س^{٢} + ١٥٠ س − ١٠٠٠٠

** ∴ $\frac{د ر}{د س}$ = − ٠,٠٤س + ١٥٠

** وبوضع $\frac{د ر}{د س}$ = صفر ، نجد أن :

− ٠,٠٤س + ١٥٠ = صفر

∴ س = $\frac{١٥٠}{٠,٠٤}$ = ٣٧٥

** المشتقة الثانية للدالة هي : $\frac{د^{٢} ر}{د س^{٢}}$ = −٠,٠٤ < صفر

ومن هنا أيضاً فإن أقصى ربح يمكن تحقيقه عندما يكون عدد الوحدات المنتجة والمباعة (٣٧٥ وحدة إنتاج)

وبالتعويض فى دالة الربح نجد أن أقصى ربح يمكن تحقيقه هو :

ر = − ٠,٠٢ (٣٧٥)^{٢} + ١٥٠ (٣٧٥) − ١٠٠٠٠

= ١٨١٢٥ جنيه .

(ثانياً) تحديد سعر بيع الوحدة في ظل النهاية العظمى للربح :

سعر بيع الوحدة = ع = ٢٠٠ − ٠,٢ (٣٧٥)

= ١٢٥ جنيه .

حل آخر :

يمكن تحديد (س) التي تحقق أكبر ربح ممكن بأنها (س) التي يكون عندها :

الإيراد الحدي = التلفة الحدية

٢٠٠ − ٠,٤ س = ٥٠

١٥٠ = ٠,٤ س ، ومنها ، س = ٣٧٥ وحدة ونستكمل الحل

التطبيق (٢)

بفــرض أن متوسط التكلفة (ت) لتسيير شاحنة لنقل البضائع للكيلومتر الواحد تتحدد بالعلاقة التالية :

$$ت = \frac{٩٠}{س} + \frac{س}{٤٠}$$

حيث (س) هي السرعة المتوسطة [كم / ساعة]

والمطلوب تحديد متوسط السرعة (س) التي ينبغي أن تسير بها الشاحنة حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن ؟.

وماهي التكلفة عندئذ ، وذلك باستخدام أسلوب التفاضل ؟.

الحــل :

دالة التكاليف الكلية هي : $ت = \frac{٩٠}{س} + \frac{س}{٤٠}$

$$ت = ٩٠ \, س^{-١} + ٠,٠٢٥ \, س$$

•• $\therefore \frac{ءت}{ءس} = -٩٠ \, س^{-٢} + ٠,٠٢٥$

•• وبوضع $\frac{ءت}{ءس}$ = صفر ، نجد أن :

$$-٩٠ \, س^{-٢} + ٠,٠٢٥ = صفر$$

$-\frac{٩٠}{س^{٢}} + ٠,٠٢٥ = صفر$ (بضرب الطرفين × $س^{٢}$)

$$\therefore -٩٠ + ٠,٠٢٥ \, س^{٢} = صفر$$

$$\therefore س^{٢} = \frac{٩٠}{٠,٠٢٥} = ٣٦٠٠$$

$\therefore$ إما : س = ٦٠ أو س = − ٦٠

وباستبعاد السرعة السالبة

∴ س = ٦٠

•• المشتقة الثانية للدالة هي : $\frac{د^٢ت}{د س^٢}$ = ١٨٠ س$^{-٣}$ = $\frac{١٨٠}{س^٣}$

وبالتعويض في المشتقة الثانية للدالة بقيمة (س= ٦٠) ، فإن :

$\frac{د^٢ت}{د س^٢}$ = $\frac{١٨٠}{(٦٠)^٣}$ = كمية موجبة ٠

ومـــن هنا ، فإن السرعة التي يجب أن تسير بها الشاحنة لكي تكون التكاليف أقل ما يمكن هي (٦٠ كم / ساعة)

وبالتعويض فى دالة التكاليف (ت) نجد أن أقل تكلفة يمكن تحقيقها هي :

ت = $\frac{٩٠}{٦٠}$ + $\frac{٦٠}{٤٠}$

= ١,٥ + ١,٥ = ٣ وحدات نقدية ٠

التطبيق (٣)

إذا كانت تكاليف إنتاج (س) وحدة إنتاج من منتج معين تتحدد بالعلاقة التالية :

ت = ٢٠ – ٦ س + س^٢

حيث (ت) تمثل تكاليف الإنتاج بالمليون جنيه٠

والمطلوب :

١. تحديد حجم الإنتاج الذي يحقق تدنية تكاليف الإنتاج عند أدنى حد لها ؟٠

٢. تحديد أدنى مستوى ممكن من التكاليف ؟٠

٣. تحديد التكلفة المتوسطة لإنتاج الوحدة ؟٠

الحــل :

(١) تحديد حجم الإنتاج الذي يحقق تدنية تكاليف الإنتاج :

ويعني ذلك إيجاد نقطة النهاية الصغرى لدالة التكاليف ، ويمكن ذلك على النحو التالي :

(أولاً) نوجد المشتقة الأولى للدالة =

$$\frac{د ت}{د س} = -٦ + ٢ س$$

(ثانياً) نحدد قيم س بوضع $\frac{د ت}{د س}$ = صفر

∴ -٦ + ٢ س = صفر

∴ ٢ س = ٦

∴ س = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

(ثالثاً) نوجد المشتقة الثانية للدالة = $\frac{د^{٢} ت}{د س^{٢}}$ = + ٢

وحيــث أن $\frac{د^{٢} ت}{د س^{٢}}$ موجــبة دائماً ، فإنه يمكن القول بأنه توجد نهاية صــغرى للدالة عند س = ٣ ، أي أنه عند حجم إنتاج ٣ وحدات إنتاج تتحقق أقل تكلفة ممكنة .

(٢) تحديد أدنى مستوى ممكن من التكاليف :

بالــتعويض فــي دالــة التكاليف الرئيسية عن (س = ٣) ينتج أدنى مستوى ممكن من التكاليف ، حيث :

ت = ٢٠ - ٦ (٣) + (٣)^{٢} = ١١ مليون جنيه.

(٣) تحديد التكلفة المتوسطة لإنتاج الوحدة :

$$\text{التكلفة المتوسطة} = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{عدد الوحدات المنتجة}}$$

$$\frac{١١}{٣} = ٣,٦٧ \text{ مليون جنيه}$$

التطبيق (٤)

إذا كانت الإيراد الكلي من بيع (س) وحدة إنتاج من منتج معين تتحدد بالعلاقة التالية :

$$ي = ٢٠ \text{ س} - ٠,١ \text{ س}^٢$$

حيث (ي) تمثل الإيراد الكلي بالمليون وحدة نقد ٠

والمطلوب :

١. تحديد حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى إيراد ممكن ؟

٢. تحديد أقصى مستوى ممكن من الإيراد ؟٠

٣. تحديد الإيراد المتوسط لبيع الوحدة ؟٠

الحـــل :

(١) تحديد حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى إيراد ممكن:

ويعنـــي ذلك إيجاد نقطة النهاية العظمى لدالة الإيراد ، ويمكن ذلك على النحو التالي :

(أولاً) نوجد المشتقة الأولى للدالة =

$$\frac{د \text{ ي}}{د \text{ س}} = ٢٠ - ٠,٢ \text{ س}$$

(ثانياً) بوضع $\frac{دي}{دس}$ = صفر ، ومنها نحدد قيم س

∴ ٢٠ – ٠,٢ س = صفر

∴ ٠,٢ س = ٢٠

∴ س = $\frac{٢٠}{٠,٢}$ = ١٠٠ وحدة .

(ثالثاً) نوجد المشتقة الثانية للدالة = $\frac{د^٢ي}{دس^٢}$ = – ٠,٢

وحيث أن $\frac{د^٢ي}{دس^٢}$ سالبة دائماً ، فإنه يمكن القول بأنه توجد نهاية عظمى للدالة عند س = ١٠٠ ، أي أنه عند حجم إنتاج وبيع ١٠٠ وحدة إنتاج يتحقق أقصى إيراد ممكن .

(٢) تحديد أقص مستوى ممكن من الإيراد :

بالتعويض في دالة الإيراد الكلي عن (س = ١٠٠) نحصل على أقصى مستوى ممكن من الإيراد ، حيث :

ي = ٢٠ (١٠٠) – ٠,١ (١٠٠)^٢

= ٢٠٠٠ + ١٠٠٠ = ١٠٠٠ مليون وحدة نقد

(٣) تحديد الإيراد المتوسط لبيع الوحدة :

الإيراد المتوسط = $\frac{\text{الإيراد الكلي}}{\text{عدد الوحدات المباعة}}$

$\frac{١٠٠}{١٠٠}$ = ١٠ مليون وحدة نقد

التطبيق (٥)

محــتكر لســلعة ما يمكنه أن يبيع شهرياً (س) وحدة من السلعة بتكلفة تتحدد بالعلاقة التالية :

ت = ٠,٧ س^{٢} + ٤٠ س + ٤٠٠٠٠

وبافتراض أن سعر بيع الوحدة (ع) يتحدد بالعلاقة التالية :

ع = ٥٤٠ – ٠,٣ س

المطلوب:

١. تحديد حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن ؟.
٢. وما مقدار هذا الربح عندئذ ؟.
٣. ما هو السعر الذي يحقق أقصى ربح ؟.

الحــل :

(١) تحديد حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن :

الربح = الإيراد – التكاليف

∵ الإيراد = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات المباعة

∴ ي = ع × س = (٥٤٠ – ٠,٣ س) × س

∴ ي = ٥٤٠ س – ٠,٣ س^{٢}

∴ ر = ٥٤٠ س – ٠,٣ س^{٢} – [٠,٧ س^{٢} + ٤٠ س + ٤٠٠٠٠]

= ٥٤٠ س – ٠,٣ س^{٢} – ٠,٧ س^{٢} – ٤٠ س – ٤٠٠٠٠

∴ ر = ٥٠٠ س – س^{٢} – ٤٠٠٠٠

وعلى ذلك فإن دالة الربح المطلوب تعظيمها هي :

ر = – س^{٢} + ٥٠٠ س – ٤٠٠٠٠

(أولاً) نوجد المشتقة الأولى للدالة =

$$\frac{ءر}{ءس} = -٢ س + ٥٠٠$$

(ثانياً) بوضع $\frac{ءر}{ءس}$ = صفر ، ومنها نحدد قيم س .

∴ -٢ س + ٥٠٠ = صفر

∴ س = ٢٥٠

(ثالثاً) نوجد المشتقة الثانية للدالة = $\frac{ء^{٢}ر}{ءس^{٢}}$ = - ٢　　(كمية سالبة)

وحيث أن $\frac{ء^{٢}ر}{ءس^{٢}}$ سالبة دائماً ، فإنه توجد نهاية عظمى للدالة عند س = ٢٥٠ ، أي أنه عند حجم إنتاج ٢٥٠ وحدة يمكن تحقيق أكبر ربح ممكن .

(٢) مقدار هذا الربح :

ويمكن الحصول على الربح عندئذ بالتعويض عن (س=٢٥٠) في الدالة الرئيسية للربح ، ويكون :

ر= - (٢٥٠)^{٢} +[٥٠٠ × ٢٥٠] - ٤٠٠٠٠

= - ٦٢٥٠٠ + ١٢٥٠٠٠ - ٤٠٠٠٠ = ٢٢٥٠٠ جنيهاً

(٣) السعر الذي يحقق أقصى ربح :

ع = ٥٤٠ - ٠,٣ س

∴ ع = ٥٤٠ - ٠,٣ (٢٥٠)

∴ ع = ٥٤٠ - ٧٥

∴ ع = ٤٦٥ جنيه .

التطبيق (٦)

شـــركة فرغلي لنقل البضائع بالمنصورة وجدت أن التكلفة (ت) لتسيير السيارة لنقل البضائع للكيلومتر الواحد تتحدد بالعلاقة التالية :

$$ت = \frac{٩٨}{س} + \frac{س}{٥٠}$$

حيث (س) هي السرعة المتوسطة [كم / ساعة]

والمطلوب :

١. تحديد السرعة المتوسطة (س) التي ينبغي على السائق أن يسير عليها حتى تكون التكلفة أقل ما يمكن لقطع الكيلومتر الواحد ؟٠

٢. وماهي تكلفة تسيير السيارة للكيلومتر الواحد ؟٠

الحـــل :

دالة التكاليف الكلية هي : $ت = \frac{٩٨}{س} + \frac{س}{٥٠}$

$ت = ٩٨ س^{-١} + ٠,٠٢ س$

$\because\ \therefore \frac{دت}{دس} = -٩٨ س^{-٢} + ٠,٠٢$

$\because$ وبوضع $\frac{دت}{دس} =$ صفر ، نجد أن :

$-٩٨ س^{-٢} + ٠,٠٢ =$ صفر

$-\frac{٩٨}{س^{٢}} + ٠,٠٢ =$ صفر (بضرب الطرفين × $س^{٢}$)

$\therefore -٩٨ + ٠,٠٢ س^{٢} =$ صفر

$\therefore س^{٢} = \frac{٩٨}{٠,٠٢} = ٤٩٠٠$

∴ إما : س = ٧٠ أو س= − ٧٠

وباستبعاد السرعة السالبة

∴ س = ٧٠

•• المشتقة الثانية للدالة هي : $\frac{د^٢ ت}{د س^٢}$ = ١٩٦ س$^{-٣}$ = $\frac{١٩٦}{س^٣}$

وبالتعويض في المشتقة الثانية للدالة بقيمة (س= ٧٠) ، فإن :

$\frac{د^٢ ت}{د س^٢}$ = $\frac{١٩٦}{(٦٠)^٣}$ = كمية موجبة •

ومن هنا ، فإن السرعة التي يجب أن تسير بها السائق لكي تكون التكاليف أقل ما يمكن هي (٧٠ كم / ساعة)

(٢) تكلفة تسيير السيارة للكيلومتر الواحد :

وبالتعويض فى دالة التكاليف (ت) نجد أن أقل تكلفة يمكن تحقيقها هي :

ت = $\frac{٩٨}{٧٠}$ + $\frac{٧٠}{٥٠}$

= ١,٤ + ١,٤ = ٢,٨ وحدة نقد •

التطبيق (٧)

إذا كانـــت دالة التكاليف الكلية (ص) في إحدى المنشآت الصناعية على الصورة : ص = ٠,٢ س^٣ + ٥ س + ١٨٠

حيث (س) تمثل عدد الوحدات المنتجة •

والمطلوب :

١. تحديد التكاليف الكلية عند إنتاج ١٠٠ وحدة ؟
٢. تحديد التكاليف المتوسطة عند إنتاج ٢٠٠ وحدة ؟•
٣. تحديد التكاليف الحدية في الحالتين ؟•

الحـل :

(١) التكاليف الكلية عند إنتاج ١٠٠ وحدة :

التكاليف الكلية عند إنتاج ١٠٠ وحدة = ٠,٢ (١٠٠)^{٣} + ٥ (١٠٠) + ١٨٠

= ٠,٢ × ١٠٠٠٠٠٠ + ٥ × ١٠٠ + ١٨٠

= ٢٠٠٠٠٠ + ٥٠٠ + ١٨٠

= ٢٠٠٦٨٠ جنيه ٠

(٢) التكاليف المتوسطة عند إنتاج ٢٠٠ وحدة :

التكاليف المتوسطة عند إنتاج ٢٠٠ وحدة = $\frac{ص}{س}$

= $\frac{٠,٢ س^{٣} + ٥ س + ١٨٠}{س}$

= ٠,٢ س^{٢} + ٥ + $\frac{١٨٠}{س}$

= ٠,٢ (٢٠٠)^{٢} + ٥ + $\frac{١٨٠}{٢٠٠}$ = ٨٠٠٥,٩ جنيه

(٣) تحديد التكاليف الحدية في الحالتين :

التكاليف الحدية = $\frac{د ص}{د س}$ = ٠,٦ س^{٢} + ٥

عند إنتاج (١٠٠) وحدة :

التكلفة الحدية = ٠,٦ (١٠٠)^{٢} + ٥ = ٠,٦ × ١٠٠٠٠ + ٥ = ٦٠٠٥ جنيه

عند إنتاج (٢٠٠) وحدة :

التكلفة الحدية = ٠,٦ (٢٠٠)^{٢} + ٥ = ٠,٦ × ٤٠٠٠٠ + ٥ = ٢٤٠٠٥ جنيه

التطبيق (٨)

إذا كانت دالة التكاليف المتوسطة هي :

$$\frac{٠,٠٥ س^٢ + ٣ س + ٨}{١٠ س}$$

حيث (س) تمثل عدد الوحدات المنتجة .

المطلوب :

إيجاد دالة التكاليف الحدية ؟.وما هي تلك التكاليف عند (س=١٠) ؟.

الحـــل :

لإيجـــاد دالـــة التكاليف الحدية ، نوجد دالة التكاليف الكلية ، ثم نوجد المشتقة الأولى لدالة التكاليف الكلية فنحصل على دالة التكاليف الحدية.

التكاليف الكلية = عدد الوحدات × التكلفة المتوسطة

$$\therefore ت = س \times \frac{٠,٠٥ س^٢ + ٣ س + ٨}{١٠ س}$$

$$\therefore ت = ٠,٠٠٥ س^٢ + ٠,٣ س + ٠,٨ .$$

∴ دالة التكاليف الحدية هي :

$$التكاليف الحدية = \frac{د ص}{د س} = ٠,٠١ س^٢ + ٠,٣$$

** وعند : س = ١٠

$$\therefore التكاليف الحدية = ٠,٠١ (١٠)^٢ + ٠,٣$$

$$= ٠,٠١ \times ١٠٠ + ٠,٣$$

$$= ٠,١ + ٠,٣ = ٠,٤$$

التطبيق (٩)

إذا كانت العلاقة بين حجم الإنتاج اليومي والتكاليف الكلية لأحد المصانع الذي ينتج نوع واحد من المنتجات تمثلها الدالة التالية :

$$ت = ١٠٠٠٠ + ٥٠٠ ع + ع^{٢}$$

حيث (ت) تمثل التكاليف الكلية ، (ع) تمثل عدد الوحدات المنتجة.

المطلوب: تحديد حجم الإنتاج الذي يحقق أدنى تكلفة متوسطة ؟.

الحـــل :

$$\text{التكلفة المتوسطة} = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{عدد الوحدات المنتجة}}$$

فإذا رمزنا للتكاليف المتوسطة بالرمز (ك) ، فإن :

$$\therefore ك = \frac{ت}{ص}$$

$$\therefore ك = \frac{١٠٠٠٠+٥٠٠ع+ع^{٢}}{ع}$$

$$\therefore ك = \frac{١٠٠٠٠}{ع} + ٥٠٠ + ع$$

$$\therefore ك = ١٠٠٠٠ ع^{-١} + ٥٠٠ + ع$$

ومن ثم نوجد نقطة النهاية الصغرى لدالة التكاليف المتوسطة هذه ، حيث :

•• $\therefore \frac{دك}{دع} = -١٠٠٠٠ ع^{-٢} + ١$

•• وبوضع $\frac{دك}{دع}$ = صفر ، ومنها نوجد قيم (ع) ، نجد أن :

$$-١٠٠٠٠ ع^{-٢} + ١ = \text{صفر}$$

$- \frac{١٠٠٠٠}{ع^{٢}} + ١ =$ صفر (بضرب الطرفين × $ع^{٢}$)

∴ $- ١٠٠٠٠ + ع^{٢} =$ صفر

∴ $ع^{٢} = ١٠٠٠٠$

∴ إما : ع = ١٠٠ أو ع = − ١٠٠

وباستبعاد (ع) السالبة لأنها تمثل عدد الوحدات

∴ ع = ١٠٠

** المشتقة الثانية للدالة هي : $\frac{د^{٢}ك}{د ع^{٢}} = ٢٠٠٠٠ ع^{-٣} = \frac{٢٠٠٠٠}{ع^{٣}}$

وبالتعويض في المشتقة الثانية للدالة بقيمة (س= ١٠٠) ، فإن :

$\frac{د^{٢}ك}{د ع^{٢}} = \frac{٢٠٠٠٠}{(١٠٠)^{٣}}$ = كمية موجبة ٠

ومن هنا ، فإن التكاليف المتوسطة تكون أقل ما يمكن عند إنتاج (١٠٠) وحدة إنتاج يومياً ٠

تمارين على الفصل السابع

(١) بفرض أن العلاقة بين صافي الربح (ر) والكمية المنتجة والمباعة (س) يمكن تمثيلها بالدالة :

$$ر = ١٠٠ س - \frac{س^٢}{٤}$$

أوجد متوسط معدل التغير في الربح إذا زاد حجم المبيعات (س) من ٤ إلى ٨ وحدات يومياً ؟.

(٢) فيما يلي المبيعات السنوية (بآلاف الجنيهات) لإحدى الشركات لفترة خمس سنوات :

السنة	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧	١٩٩٨	١٩٩٩
المبيعات	٤٠	٤٥	٤٩	٥٢	٧٢

المطلوب :

أوجد متوسط معدل التغير في المبيعات بين كل من السنتين :

أ- ١٩٩٥ ، ١٩٩٨

ب- ١٩٩٦ ، ١٩٩٩

وما الذي تشير إليه النتائج التي توصلت إليها ؟.

(٣) إذا كانت العلاقة بين صافي الربح (ر) وحجم المبيعات (س) يمكن تمثيلها بالدالة : $ر = ٢٠٠ س - \frac{١}{٢} س^٢$

أوجد معدل تغير الربح بالنسبة لحجم المبيعات ؟. ثم استنتج :

(أ) معدل تغير حجم المبيعات بالنسبة للربح؟

(ب) حجم المبيعات الذي يحقق أكبر ربح ممكن ؟

(٤) بفرض أن إجمالي الأجور (ص) التي تتحملها شركة معينة لعدد (س) من العمال هي :

ص = ١٠٠٠٠+ س^{٢} – ٥٠ س

فاوجد عدد العمال الذي يجب أن تستخدمه الشركة ليكون متوسط أجر العامل أقل ما يمكن ، ثم أوجد متوسط أجر العمال عندئذ ؟.

(٥) إذا كان سعر بيع الوحدة من إنتاج إحدى الشركات يساوي ١٠٠٠ جنيه ، وكانت التكلفة الكلية التي تتحملها الشركة لإنتاج (س) وحدة هي :

ك = س^{٢} + ٥٠

فإذا علمت أن حجم إنتاج الشركة في ظل المعلومات المتاحة يساوي ٢٥٠ وحدة ، فهل تنصح الشركة بزيادة إنتاجها أو تخفيضه ، وما هو حجم الإنتاج المناسب من وجهة نظرك ؟.

(٦) بفرض أن التكلفة الكلية لإنتاج (س) وحدة من منتج معين :

ت = ١٠٠ + ٥ س

وبافتراض أن الكمية المنتجة تباع بالكامل بسعر الوحدة :

ع = ٥٤٠ – ٠,٣ س

إوجد بطريقتين مختلفتين حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن ؟.

(٧) إذا إعطيت لك دالة التكاليف الكلية التالية :

ت = ٢ س^{٣} – ١٠٠ س^{٢} + ٢٥ س

بين أن التكاليف الحدية تساوي الحد الأدنى لدالة التكلفة المتوسطة ؟.

(٨) إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة (ط) وسعر تلك السلعة (س) هي : ط = ١٠٠ – ٥ س

فاحسب بطريقتين مختلفتين مرونة الطلب على هـذه السلعـة إذا ارتفع سـعـرها مـن ١٠ جنـيهات إلى ١٥ جنيه مع تفسير ما تصل إليه من نتائج .

(٩) بفرض أن الطلب على سلعة معينة متكافئ المرونة أ وأن الكمية المطلوبة من هذه السلعة (٢٠٠) وحدة عند سعر قدره (٢٥) جنيه ، فاحسب معدل تغير الطلب على هـذه السلعـة بالنسبة إلى سعـرها ؟٠

(١٠) بفـرض أن معـدل تغير الكمية المعروضة من سلعة معينة (ع) بالنسبة إلى سعرها يساوي ١٠٪ ، فأوجد مرونة العرض لهذه السلعة إذا علمت أن الكمية المعروضة منها عند السعر (١٠٠ج) تساوي (٥٠ وحدة) ؟ .

(١١) إذا كانـت العلاقـة بين الكمية المعروضة من سلعة معينـة (ع) وسعر هـذه السلعة (س) هي : $ع = س^2$

والمطلوب إيجاد :

☒ مـرونة عـرض السلعة إذا انخفض سعرها من ٣٠ جنيها إلى ٢٠ جنيها ؟٠

☒ مرونة عرض السلعة عند السعر ٢٥ ؟٠

☒ حسـاب معـدل تغـير سعر السلعة بالنسبة للكمية المعروضة منها بفرض أن حجم المعروض من هذه السلعة ١٠٠ وحدة ؟٠

(١٢) إذا علمـت أن الدخـل احدي من إنتاج وبيع الكمية المطلوبة من سلعة معيـنة (ط)بسعر قدره (س) يساوي (٤) ، فاوجد معدل تغير حجم الطلب على هذه السلعة بالنسبة لمستوى الدخل المتحقق ، وهل الطلب على هذه السلعة متكافئ المرونة عند السعر (٥) وحدات نقدية ؟٠

(١٣) إذا كانـت العلاقـة بيـن حجم الطلب على سلعة معينة (ط) وسعر تلك السلعة (س) هي : ط = ١٠٠ – ٢ س

أوجـد الدخل الحدي بطريقتين مختلفتين ، إذا كان سعر هذه السلعة هو (١٠جنيه) ؟ .

(١٤) بفـرض أن مضـاعف الإستثمار يساوي (٣,٢٥) ، أوجد الميل الحدي للإستهلاك ، والميل الحدي للإدخار ؟.

(١٥) إذا كانت العلاقة بين الإستهلاك (ك) والدخل (ي) هي :

$$ك = ٣٠ + ٠,٥ ي \sqrt[٣]{ي^٢}$$

أوجد الميل الحدي للإستهلاك ، والميل الحدي للإدخار عند مستوى دخل (٥٠٠٠٠) جنيه ، واستنتج من ذلك مضاعف الإستثمار ؟.

(١٦) إذا كانت العلاقة بين الإستهلاك (ك) والدخل (ي) هي :

$$ك = ١٠ + ٠,٨ ي - \sqrt{ي}$$

أوجد الميل الحدي للإستهلاك ، والميل الحدي للإدخار عند مستوى دخل (٥٠٠) جنيه ، واستنتج من ذلك مضاعف الإستثمار ؟.

(١٧) إذا كانت دالة التكاليف الكلية التالية :

$$ت = ٢٠ س - ٦ س^٢ + س^٣$$

بيـن أن التكالـيف الحديـة تساوي التكلفة المتوسطة عند نقطة النهاية الصغرى للدالة ؟.

(١٨) إذا كانت دالتى التكلفة الكلية والايراد الكلي لمنتج معين هما :

$$ت = ٠,٠٥ س^٢ + ٢٩س + ١٠٠٠$$

$$ي = ٥٠ س - س^٢$$

أوجـد عـدد الوحدات اللازم إنتاجها لكى يكون الربح اكبر ما يمكن .

(١٩) التكلفة الكلية بالجنيهات لتصفية س من الوحدات من البترول هي :

$$ت = س^٢ - س$$

إذا كان البترول يصفى بمعدل ثابت قدره ١٠ وحدات في الساعة . اوجد معدل تغير التكلفة عندما يكون معدل الإنتاج ٤٠ وحدة

(٢٠) وجد مصنع ان دالتى التكلفة والإيراد هما :

$$ت = ١٠٠٠ + ٥٠ س + \frac{س^٢}{١٠}$$

$$ي = ٤٠٠ + \frac{س}{٢٠}$$

(أ) اوجد التكلفة الحدية والإيراد الحدي والربح الحدي

(ب) بأي معدل تتغير التكلفة عندما يكون مستوى الإنتاج س = ٢٥

(جـ) بأي معدل يتغير الإيراد عندما يكون مستوى الإنتاج س = ٢٥

(د) بأي معدل يتغير الربح عندما يكون مستوى الإنتاج س = ٢٥

(هـ) قدر تكلفة إنتاج الوحدة السادسة والعشرين .

(٢١) افرض أن مصنعاً ما إمكانياته محدودة بسبب وسائل الإنتاج بحيث ينتج ما لا يزيد عن ٨٠ وحدة يومياً ، وإذا كانت دالتي التكلفة اليومية والإيراد اليومي هما :

$$ت = س^٢ + ٤س + ٢٠٠$$

$$ي = ١٠٨ س - س^٢$$

وإذا كانت كل الوحدات المنتجة يتم بيعها ، كم وحدة يجب أن ينتجها المصنع ليحصل على اكبر ربح ممكن ؟

(٢٢) شركة الملاحة البحرية وجدت أن تكلفة تسيير باخرة ملاحية محملة بالبضائع للكيلومتر تحدده المعادلة التالية :

$$ت (س) = \frac{٨٠}{س} + \frac{س}{٢٠}$$

حيث س هى السرعة المتوسطة كم / ساعة .

والمطلـــوب إيجـــاد السرعة المتوسطة التي ينبغي على الباخرة أن تسير بها حتى تكون التكلفة اقل ما يمكن لقطع الكيلو متر وما هي التكلفة ؟

(٢٣) شـــركة احمد يوسف للنقل لديها سيارة تسع ٥٠ راكباً ، فإذا كانت أجرة السفر (ع) جنيها للفرد الواحد مرتبطة بعدد الركاب (س) بالعلاقة الآتية :

$$ع (س) = \left(٣ - \frac{س}{٤٠} \right)^{٢}$$

اكتـــب الدالـــة التي تعطى حصيلة الشركة في المرحلة الواحدة ثم أوجد عدد الركاب الذي يعطى للشركة اكبر حصيلة وما هي أجرة السفر.

(٢٤) إذا كانت دالة الطلب على النحو التالي :

$$ط = ٢٠٠ - ١٠س$$

المطلوب حساب مرونة الطلب عند السعر ٦ ثم عند السعر ١٦ ؟.

(٢٥) إذا كانت العلاقة بين العرض (ع) والسعر (س)

$$ع (س) = ٤س^{٢}$$

المطلـــوب إيجـــاد معامل المرونة للعرض عند السعر ١٠ وحدات نقدية للوحدة من السلعة ؟.

(٢٦) تـــتحدد العلاقة بين التكاليف الكلية ت (س) وحجم الإنتاج الكلى س وفقاً للدالة التالية :

$$ت (س) = \frac{١}{١٠٠٠} \left(٣س^{٢} - ٥٥ \right)^{٣}$$

المطلـــوب حســـاب معـــدل التغير فى دالة التكاليف الكلية بالنسبة لحجم الإنتاج الكلي وذلك عند حجم إنتاج كلي قدره ٥ وحدات ؟.

(٢٧) اذا كانت العلاقة بين العرض والسعر لسلعة ما تمثلها الدالة التالية :

$$ع = ١٥٠ + ١,٢ س٢$$

المطلـــوب إيجـــاد مـــرونة العرض عندما يكون سعر الوحدة ١٠ وحدات نقدية ؟.

الفصل الثامن

التكامل وتطبيقاته التجارية

- ✲مقدمة ·
- ✲مفهوم التكامل ·
- ✲التكامل غير المحدود ·
- ✲قواعد التكامل غير المحدود ·
- ✲التكامل المحدود والمساحة أسفل المنحنى ·
- ✲التطبيقات التجارية والإقتصادية على التكامل

(٧-١) مقدمة

درسنا في الفصل السابق كيفية إيجاد المشتقة الأولى والمعاملات التفاضلية العليا للدالة باختلاف أنواعها ، وفي هذا الفصل نتناول بالدراسة لقواعد استخدام أسلوب التكامل مع بيان كيفية تطبيقه في بعض المجالات الإقتصادية والتجارية٠

ويعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ، بمعنى أنه إذا عرفت المشتقة التفاضلية لدالة ما فإن التكامل يمكننا من معرفة الدالة نفسها ، فعلى سبيل المثال نجد أنه بمعرفة التكاليف الحدية يمكن من خلال التكامل معرفة دالة التكاليف الكلية ، وأيضاً بمعرفة الإيراد الحدي يمكن من خلال أسلوب التكامل معرفة الإيراد الكلي ، وهكذا ٠ ويُرمز لعملية التكامل بالرمز ($\int$) ، وبصفة عامة إذا كان لدينا المشتقة الأولى $\overline{د}$(س) ونريد الحصول على الدالة الأصلية د (س) ، فإن :

$$د\,(س) = \int \overline{د}(س)\cdot د\,س$$

أي أن الدالة الأصلية د (س) تساوي تكامل مشتقتها الأولى بالنسبة للمتغير (س) ٠

(٨-٢) ثابت التكامل :

إذا إفترضنا الدوال التالية :

$$د_{1}(س) = س^{2}$$

$$د_{2}(س) = س^{2} + ٥$$

$$د_{3}(س) = س^{2} - ١٠$$

نلاحظ أن المشتقة الأولى لهذه الدوال كلها متساوية ، حيث :

$$\overline{د_١}(س) = \frac{ﻫ}{ﻫ س} (س^٢) = ٢س$$

$$\overline{د_٢}(س) = \frac{ﻫ}{ﻫ س} (س^٢ + ٥) = ٢س$$

$$\overline{د_٣}(س) = \frac{ﻫ}{ﻫ س} (س^٢ - ١٠) = ٢س$$

وهكذا يوجد عدد لا نهائي من الدوال ص حيث $\frac{ﻫ ص}{ﻫ س}$ = ٢ س ، على الشكل :

$$ص = س^٢ \pm أ$$

حيــث (أ) هنا يُسمى ثابت التكامل ، ولتحديد ثابت التكامل فلابد من معلومية نقطة من نقاط الدالة بإحداثييها السيني والصادي .

وعلى ذلك ، إذا كان : $\overline{د}(س) = ٢ س$ ، فإنه فيجاد الدالة د (س) ، نجد أنه من خلال أسلوب المحاولة والخطأ وأن التكامل عملية عكسية للتفاضل نستنتج أن الدالة هي :

$$د (س) = س^٢ + أ$$

ومــن ناحـية أخرى إذا كان : $\overline{د}(س) = ٢ س$ ، والمطلوب إيجاد الدالة ص علمــاً بــأن ص = ٦ عندما س = ٢ ، ففي مثل هذه الحالة يمكن إيجاد الدالة الأصــلية وتحديد قيمة ثابت التكامل (أ) ، فمن خلال أسلوب المحاولة والخطأ وأن التكامل عملية عكسية للتفاضل نستنتج أن الدالة هي :

$$ص = س^٢ + أ$$

وبالتعويض في الدالة عن ص = ٦ ، س = ٢ ، يكون :

$\therefore ٦ = ٢^٢ + أ$ ، $\therefore أ = ٦ - ٤ = ٢$

$\therefore$ الدالة هي : $ص = س^٢ + ٢$

(٨-٣) قواعد التكامل :

إذا كان معلوماً لدينا $\frac{ءص}{ءس}$ ، فإنه يمكن استخدام الرموز :

$$\int \frac{ءص}{ءس} . ءس = ص$$ ، حيث :

- ⊠ $\int$: يمثل رمز التكامل ٠
- ⊠ $\frac{ءص}{ءس}$: يمثل المشتقة الأولى للدالة المطلوب إجراء التكامل عليها٠
- ⊠ ءس : يمثل المتغير المستقل الذي سوف تتم عملية التكامل بالنسبة إليه ٠

ولسوف نتناول فيما يلي القواعد الأساسية للتكامل ٠

القاعدة الأولى : قاعدة القوى (الأس)

إذا كان ن عدد حقيقي ، بحيث ن ≠ صفر فإن :

$$\int س^{ن} . ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + أ$$

ويمكننا الحصول على الدالة الأصلية (ص) مرةً أخرى بإيجاد المشتقة الأولى لناتج التكامل السابق ، حيث :

$$ص = \frac{ء}{ءس} \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + أ$$

$$= \frac{(ن+١) س^{ن+١-١}}{ن+١} + صفر$$

$= س^{ن}$ = الدالة الأصلية التي كاملناها بالنسبة للمتغير (س) ، ويمكن تعميم ذلك للتحقق من صحة أي عملية تكامل تُجرى على أي دالة باستخدام القواعد الخاصة بالتكامل والتي نتناولها فيما يلي ٠

مثال (١)

$$\int \text{س} . \text{د س} = \frac{1}{1+1}\text{س}^{1+1} + \text{أ} = \frac{1}{2}\text{س}^{2} + \text{أ}$$

$$\int \frac{1}{\text{س}^{-2}} . \text{د س} = \int (\text{س}^{2}) . \text{د س} = \frac{1}{2+1}\text{س}^{2+1} + \text{أ} = \frac{1}{3}\text{س}^{3} + \text{أ}$$

$$\int \frac{1}{\text{س}^{-3}} . \text{د س} = \int (\text{س}^{3}) . \text{د س} = \frac{1}{3+1}\text{س}^{3+1} + \text{أ} = \frac{1}{4}\text{س}^{4} + \text{أ}$$

$$\int \frac{1}{\text{س}^{-4}} . \text{د س} = \int (\text{س}^{4}) . \text{د س} = \frac{1}{4+1}\text{س}^{4+1} + \text{أ} = \frac{1}{5}\text{س}^{5} + \text{أ}$$

$$\int \left(\frac{1}{\text{س}^{4}}\right) . \text{د س} = \int \text{س}^{-4} . \text{د س} = \frac{1}{-4+1}\text{س}^{-4+1} + \text{أ}$$

$$= \frac{1}{-3}\text{س}^{-3} + \text{أ} = -\frac{1}{3\,\text{س}^{3}} + \text{أ}$$

$$\int \left(\frac{1}{\text{س}^{3}}\right) . \text{د س} = \int \text{س}^{-3} . \text{د س} = \frac{1}{-3+1}\text{س}^{-3+1} + \text{أ}$$

$$= \frac{1}{-2}\text{س}^{-2} + \text{أ} = -\frac{1}{2\,\text{س}^{2}} + \text{أ}$$

$$\int \sqrt{\text{س}} . \text{د س} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\text{س}^{\frac{1}{2}+1} + \text{أ} = \frac{2}{3}\text{س}^{1.5} + \text{أ}$$

ويُـترك للطالب التحقق من صحة التكاملات السابقة ، وذلك من خلال لإيجـاد المشتقة الأولى لكل ناتج من نواتج هذه التكاملات ، وسيجد الطالب أن المشـتقة الأولىلناتج أي تكامل هي نفسها الدالة الأصلية التي أُجريت عليها عملية التكامل .

القاعدة الثانية : الدالة الثابتة

إذا كان ك عدد حقيقي ، فإن :

$$\int [ك] . ء س = ك س + أ$$

حيث أ هو ثابت التكامل ٠

مثال (٢)

(١) $\int ء س = \int (١) ء س = س + أ$

(٢) $\int [٥] . ء س = ٥ س + أ$

(٣) $\int [-٥] . ء س = - ٥س + أ$

(٤) $\int \left(\frac{٢}{٥}\right) . ء س = \frac{٢}{٥} س + أ$

(٥) $\int \sqrt{١٥} . ء س = \sqrt{١٥} س + أ$

(٦) $\int \left(\frac{١}{٢}\right) . ء س = \frac{١}{٢} س + أ$

القاعدة الثالثة : الثابت المضروب في دالة

إذا كان ك عدد حقيقي ثابت ، فإن :

$$\int ك \bar{د}(س) . ء س = ك \int \bar{د}(س) . ء س$$

بمعنى أن تكامل حاصل ضرب مقدار ثابت في دالة يساوي حاصل ضرب المقدار الثابت × تكامل هذه الدالة

مثال (٣)

(١) $\int ٣\,\text{س}\,.\,\text{ءس} = ٣ \int \text{س}\,.\,\text{ءس} = \frac{٣}{٢}\,\text{س}^{٢} + \text{أ}$

(٢) $\int \left(\frac{\text{س}^{٣}}{٥}\right).\,\text{ءس} = \frac{١}{٥} \int \text{س}^{٣}\,.\,\text{ءس} = \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٤}\,\text{س}^{٤} + \text{أ}$

$= \frac{١}{٢٠}\,\text{س}^{٤} + \text{أ}$

(٣) $\int \left(\frac{-٥}{\text{س}^{٣}}\right).\,\text{ءس} = \int -٥\,\text{س}^{-٣}\,.\,\text{ءس}$

$= -٥ \int \text{س}^{-٣}\,.\,\text{ءس} = -٥ \times -\frac{١}{٢\,\text{س}^{٢}} + \text{أ} = \frac{٥}{٢\,\text{س}^{٢}} + \text{أ}$

(٤) $\int \frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}}\,.\,\text{ءس} = \frac{٣}{٢} \int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\,.\,\text{ءس}$

$= \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{\frac{١}{٢}+١}\,\text{س}^{\frac{١}{٢}+١} + \text{أ} = \frac{٣}{٢} \times \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{١.٥} + \text{أ} = \sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{أ}$

مثال (٤)

إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٤}{\text{س}^{٢}}$ **، فاوجد الدالة ص ؟.**

الحل :

$\text{ص} = \int \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\,.\,\text{ءس} = \int \left(\frac{٤}{\text{س}^{٢}}\right).\,\text{ءس} = \int ٤\,\text{س}^{-٢}\,.\,\text{ءس}$

$= ٤ \int \text{س}^{-٢}\,.\,\text{ءس} = \frac{٤}{-١}\,\text{س}^{-١} + \text{أ} = \frac{-٤}{\text{س}} + \text{أ}$

القاعدة الرابعة : تكامل المجموع الجبري لعدة دوال

إذا كانت :

ص = $د_١$(س) ± $د_٢$(س) ± $د_٣$(س) ± .... ± $د_ن$(س) ، فإن :

∫ ص . ءس

= ∫ $د_١$(س) ± $د_٢$(س) ± $د_٣$(س) ± .... ± $د_ن$(س) . ءس

= ∫ $د_١$(س) . ءس ± ∫ $د_٢$(س) . ءس

± .... ± ∫ $د_ن$(س) . ءس

وهكذا يكون الحال لأي عدد من الدوال •

وهـذه القـاعدة تعنـي أن تكامل مجموع عدة دوال (أو الفرق بينها) يساوي مجموع (أو الفرق بين) تكاملات هذه الدوال •

مثال (٥)

☒ ∫ (٧ $س^٥$ + ٥ $س^٣$ − ٣ $س^٢$ + ٢س − ٢٥) . ءس

= $\frac{٧}{٦}$ $س^٦$ + $\frac{٥}{٤}$ $س^٤$ − $\frac{٣}{٣}$ $س^٣$ + $\frac{٢}{٢}$ $س^٢$ − ٢٥ س + أ

= $\frac{٧}{٦}$ $س^٦$ + $\frac{٥}{٤}$ $س^٤$ − $س^٣$ + $س^٢$ − ٢٥ س + أ

☒ ∫ (٨ $س^٣$ + ٦ $س^٢$ − ٢ س + ٧) . ءس

= $\frac{٨}{٤}$ $س^٤$ + $\frac{٦}{٣}$ $س^٣$ − $\frac{٢}{٢}$ $س^٢$ + ٧ س + أ

= ٢ $س^٤$ + ٢ $س^٣$ − $س^٢$ + ٧ س + أ

مثال (٦)

إذا كان $\frac{دص}{دس} = ٣ س^{٢} + \frac{٦}{س^{٣}} - ٥ س + ١٥$ ، فاوجد الدالة ص ؟.

الحل :

$ص = \int \frac{دص}{دس} . دس$

$= \int (٣ س^{٢} + \frac{٦}{س^{٣}} - ٥ س + ١٥) . دس$

$= \int ٣ س^{٢} . دس + \int \frac{٦}{س^{٣}} . دس - \int ٥ س . دس + \int ١٥ . دس$

$= \frac{٣}{٣} س^{٣} + \frac{٦}{-٢} س^{-٢} - \frac{٥}{٢} س^{٢} + ١٥ س + أ$

$= س^{٣} - \frac{٣}{س^{٢}} - \frac{٥}{٢} س^{٢} + ١٥ س + أ$

القاعدة الخامسة : حالة خاصة من قاعدة القوى

وهـذه القاعدة تبين الحالة التي يكون فيها الأس (ن = - ١) ، فإذا كانت : ص = $س^{-١}$ ، فإن :

$$\int ص . دس = \int س^{-١} . دس = لو_{هـ} س + أ$$

أي :
$$\int \left(\frac{١}{س}\right) . دس = لو_{هـ} س + أ$$

أو
$$\int س^{-١} . دس = لو_{هـ} س + أ$$

مثال (٧)

إحسب قيمة $\int \left(\text{٧ س}^{٥} + \frac{\text{١}}{\text{٢ س}} - \text{س}^{\text{٠.٥}}\right) . \text{دس}$

الحل :

$$\int \left(\text{٧ س}^{٥} + \frac{\text{١}}{\text{٢ س}} - \text{س}^{\text{٠.٥}}\right) . \text{دس}$$

$$= \int \left(\text{٧ س}^{٥} + \left[\frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}}\right] - \text{س}^{\text{٠.٥}}\right) . \text{دس}$$

$$= \text{٧} \int \text{س}^{٥} . \text{دس} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} \int \frac{\text{١}}{\text{س}} . \text{دس} - \int \text{س}^{\text{٠.٥}} . \text{دس}$$

$$= \frac{\text{٧}}{\text{٦}} \text{س}^{٦} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{لوهـ س} - \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \text{س}^{\text{١.٥}} + \text{ك}$$

مثال (٨)

(١) $\int \left(\frac{\text{٥}}{\text{س}}\right) . \text{دس} = \int \text{٥ س}^{-١} . \text{دس} = \text{٥ لوهـ س} + \text{أ}$

(٢) $\int \left(\text{س}^{٤} - \text{٢ س}^{٣} + \frac{\text{١}}{\text{٥ س}} + \text{٥}\right) . \text{دس}$

$$= \int \text{س}^{٤} . \text{دس} - \text{٢} \int \text{س}^{٣} . \text{دس} + \frac{\text{١}}{\text{٥}} \int \frac{\text{١}}{\text{س}} . \text{دس} \quad \int \text{٥} . \text{دس}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٥}} \text{س}^{٥} - \frac{\text{٢}}{\text{٤}} \text{س}^{٤} + \frac{\text{١}}{\text{٥}} \text{لوهـ س} + \text{٥ س} + \text{أ}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٥}} \text{س}^{٥} - \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{س}^{٤} + \frac{\text{١}}{\text{٥}} \text{لوهـ س} + \text{٥ س} + \text{أ}$$

أمثلة متنوعة على قواعد التكامل :

مثال (٩)

أوجد قيمة : $\int (٥ س^٢ - \frac{٣}{س^٣} + \frac{٨}{٢ س} + ٣) . د س$

الحل :

$$\int (٥ س^٢ - \frac{٣}{س^٣} + \frac{٨}{٢ س} + ٣) . د س$$

$$= \int ٥ س^٢ . د س - \int \frac{٣}{س^٣} . د س + \int \left[\frac{٨}{٢} \times \frac{١}{س}\right] + \int ٣ . د س$$

$$= ٥ \int س^٢ . د س - ٣ \int س^{-٣} . د س + ٤ \int \left(\frac{١}{س}\right) + \int ٣ . د س$$

$$= \frac{٥}{٣} س^٣ - \frac{٣}{-٢} س^{-٢} + ٤ \text{ لوهـ } س + ٣ س + أ$$

$$= \frac{٥}{٣} س^٣ + \frac{٣}{٢} س^{-٢} + ٤ \text{ لوهـ } س + ٣ س + أ$$

مثال (١٠)

أوجد قيمة : $\int [(٢ س - ٣) (٥ س + ١)] . د س$

الحل :

$$\int [(٢ س - ٣) (٥ س + ١)] . د س$$

$$= \int [(١٠ س^٢ - ١٣ س - ٣] . د س$$

$$= \frac{١٠}{٣} س^٣ - \frac{١٣}{٢} س^٢ - ٣ س + أ$$

مثال (١١)

أوجد قيمة : $\int \frac{١+٢س^{٤}}{س} .د س$

الحل :

$= \int \frac{١}{س} .د س + \int \frac{٢س^{٤}}{س} .د س$

$= \int \frac{١}{س} .د س + \int ٢ س^{٣} .د س$

$=$ لو$_{هـ}$ س $+ \frac{٢}{٤} س^{٤} +$ أ

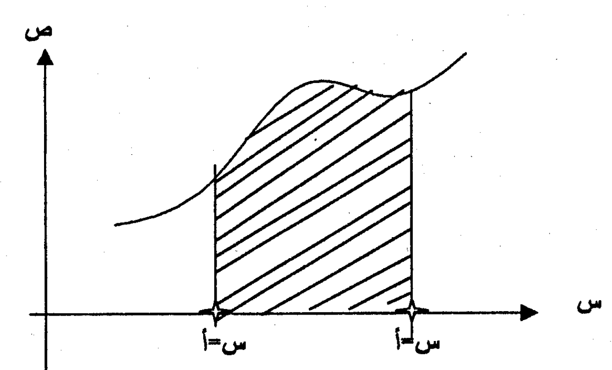
$=$ لو$_{هـ}$ س $+ \frac{١}{٢} س^{٤} +$ أ

$=$ لو$_{هـ}$ س $+ \frac{س^{٤}}{٢} +$ أ

(٨-٥) التكامل المحدود والمساحة أسفل المنحنى :

التكامل المحدود يمكن أن يعني المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات في مدى معين أو بين نقطتين على المنحنى ، وقد يعني نهاية مقدار معين .

فإذا كانت : ص = د (س) دالة متصلة وموجبة لجميع قيم س ، بحيث : أ < س < ب، كما هو الحال في الشكل التالي :



فمن خلال التكامل يمكن حساب المساحة أسفل المنحنى ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب .

ولحساب المساحة المطلوبة نحتاج إلى حساب التكامل للدالة بين النقطتين أ ، ب . ويُسمى هذا التكامل بالتكامل المحدود للدالة د (س) بالنسبة إلى س في الفترة بين س = أ ، س = ب ، ويُرمز لذلك بالرمز :

$$\text{المساحة} = \int_{أ}^{ب} د\,(س)\,.\,دس$$

حيث :

أ : يمثل الحد السفلي للتكامل .

ب : يمثل الحد العلوي للتكامل .

وعلى ذلك ، فإنه لإيجاد المساحة أسفل منحنى الدالة د(س) بين النقطتين س= أ ، س= ب في الفترة (أ ≥ س ≥ ب) نمر بالخطوات التالية :

(١) نوجد تكامل الدالة د(س) بالنسبة إلى س ، باتباع القواعد السابق دراستها مع إهمال ثابت التكامل (أ)

(٢) نوجد قيمة التكامل عند النقطة الأكبر بالتعويض عن س = ب في التكامل الناتج من الخطوة الأولى ٠

(٣) نوجد قيمة التكامل عند النقطة الأصغر بالتعويض عن س = أ في التكامل الناتج من الخطوة الأولى ٠

(٤) نوجد المساحة على أن :

المساحة = ناتج الخطوة الثانية – ناتج الخطوة الثالثة

مثال (١٣)

إحسب قيمة التكاملات التالية :

(١) $\int_{١}^{٢} (٣ س^{٢} + ٢ س + ٥) . د س$

(٢) $\int_{١}^{٣} (س + ١)^{٣} . د س$

(٣) $\int_{١}^{٢} ٣ س (س^{٢} - ١) . د س$

الحل :

(١) $\int_{١}^{٢} (٣ س^{٢} + ٢ س + ٥) . د س$

$$= \left[\frac{٣}{٣} س^{٣} + \frac{٢}{٢} س^{٢} + ٥ س \right]_{١}^{٢}$$

$$= \left[س^{٣} + س^{٢} + ٥س \right]_{١}^{٢}$$

$$= [(٢)^{٣} + (٢)^{٢} + ٥(٢)] - [(١)^{٣} + (١)^{٢} + ٥(١)]$$

$$= [٨ + ٤ + ١٠] - [١ + ١ + ٥] = ٢٢ - ٧ = \boxed{١٥}$$

(٢) $\int_{١}^{٣} (س + ١)^{٣} . ءس$

$$= \left[\frac{(س+١)^{٤}}{٤} \right]_{١}^{٣} = \left[\frac{(٣+١)^{٤}}{٤} \right] - \left[\frac{(١+١)^{٤}}{٤} \right]$$

$$= \frac{(٤)^{٤}}{٤} - \frac{(٢)^{٤}}{٤} = ٦٤ - ٤ = \boxed{٦٠}$$

(٣) $\int_{١}^{٢} ٣ س (س^{٢} - ١) . ءس = \int_{١}^{٢} (٣ س^{٣} - ٣ س) . ءس$

$$= \left[\frac{٣}{٤} س^{٤} - \frac{٣}{٢} س^{٢} \right]_{١}^{٢}$$

$$= \left[\frac{٣(٢)^{٤}}{٤} - \frac{٣(٢)^{٢}}{٢} \right] - \left[\frac{٣(١)^{٤}}{٤} - \frac{٣(١)^{٢}}{٢} \right]$$

$$= \left[\frac{٣(١٦)}{٤} - \frac{٣(٤)}{٢} \right] - \left[\frac{٣}{٤} - \frac{٣}{٢} \right]$$

$$= \left[\frac{٤٨}{٤} - \frac{١٢}{٢} \right] - \left[\frac{٣}{٤} - \frac{٣}{٢} \right]$$

$$= [١٢ - ٦] - \left[\frac{٣ - ٦}{٤} \right]$$

$$= [٦] - \left[- \frac{٣}{٤} \right] = [٦] + \left[\frac{٣}{٤} \right] = \frac{٢٧}{٤} = \boxed{٦\frac{٣}{٤}}$$ وحدة .

مثال (١٤)

ما هي المساحة تحت منحنى الدالة :

ص = س^{٢} ، بين س = صفر ، س = ٣ ؟ ٠

الحل :

$$\text{المساحة} = \int_{أ}^{ب} د\,(س)\,.\,دس \quad ،\ \text{حيث : أ = صفر ، ب = ٣}$$

$$\therefore \text{المساحة} = \int_{صفر}^{٣} (س^{٢})\,.\,دس = \left[\frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{صفر}^{٣}$$

$$= \left(\frac{١}{٣}(٣)^{٣}\right) - \left(\frac{١}{٣}\ (صفر)^{٣}\right) = ٩ - صفر = \boxed{٩}$$

مثال (١٥)

إذا علمت أن منحنى الدالة : د (س) = ٣ س^{٢} – ٢ س + ١ ، يمر بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٤ ، ٤١) فما هي المساحة المحصورة بين منحنى هذه الدالة والمحور السيني بين النقطتين السابقتين ؟ ٠

الحل :

$$\text{المساحة} = \int_{أ}^{ب} د\,(س)\,.\,دس \quad ،\ \text{حيث : أ = ١ ، ب = ٤}$$

$$\therefore \text{المساحة} = \int_{١}^{٤} (٣\,س^{٢} - ٢\,س + ١)\,.\,دس$$

$$= \left[س^{٣} - س^{٢} + س\right]_{١}^{٤} = \left((٤)^{٣} - (٤)^{٢} + (٤)\right) - \left((١)^{٣} - (١)^{٢} + (١)\right)$$

$$= ٥٢ - ١ = \boxed{٥١}$$

أمثلة متنوعة على المساحة أسفل المنحنى :

مثال (١٦)

ما هي المساحة أسفل المنحنى : ص = ٤ $س^{٣}$ ، بين النقطتين :
س = صفر ، س = ٣ .

الحل :

المساحة = $\int_{أ}^{ب}$ د (س) . ء س ، حيث : أ = صفر ، ب = ٣

∴ المساحة = $\int_{صفر}^{٣}$ (٤ $س^{٣}$) . ء س

= $\left[\frac{٤}{٤} س^{٤}\right]_{صفر}^{٣}$ = $\left[س^{٤}\right]_{صفر}^{٣}$

= $(٣)^{٤}$ − $(صفر)^{٤}$

= ٨١ − صفر = $\boxed{٨١}$

مثال (١٧)

ما هي المساحة أسفل المنحنى : ص = ٢ س − $س^{٢}$

الحل :

لمعرفة حدود التكامل نحسب نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات ، وذلك بوضع ص = صفر في معادلة المنحنى :

∴ ٢ س − $س^{٢}$ = صفر

∴ س (٢ − س) = صفر

∴ إما س = صفر أو س= ٢

$\therefore$ المساحة = $\int_{صفر}^{٢} (٢\text{ س} - \text{س}^٢)\ .\text{ د س}$

$= \left[\frac{٢}{٢}\text{س}^٢ - \frac{١}{٣}\text{س}^٣\right]_{صفر}^{٢} = \left[\text{س}^٢ - \frac{١}{٣}\text{س}^٣\right]_{صفر}^{٢}$

$= [\ (٢)^٢ - \frac{٨}{٣}\ ] - \text{صفر} = ٤ - \frac{٨}{٣} = \frac{٤}{٣} = \boxed{١\frac{١}{٣}}$ وحدة

مثال (١٨)

مـــا هي المساحة المحصورة بين المنحنى : ص = ٣ س^٢ -٦ س ، ومحور السينات ؟٠

الحل :

لتحديد حدود التكامل نحسب نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات ، وذلك بوضع ص = صفر في معادلة المنحنى :

$\therefore$ ٣ س^٢ -٦ س = صفر

$\therefore$ ٣س (س - ٢) = صفر

$\therefore$ إما س = صفر أو س= ٢

$\therefore$ المساحة = $\int_{صفر}^{٢} (٣\text{ س}^٢ - ٦\text{ س})\ .\text{ د س}$

$= \left[\frac{٣}{٣}\text{س}^٣ - \frac{٦}{٢}\text{س}^٢\right]_{صفر}^{٢} = \left[\text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢\right]_{صفر}^{٢}$

$= [\ (٢)^٣ - ٣(٢)^٢\ ] - \text{صفر}$

$= ٨ - ١٢ = - ٤$

$\therefore$ المساحة = $\boxed{٤}$ وحدات مساحة ، وذلك لأن المساحة تساوي القيمة المطلقة للتكامل ، أي أن المساحة تساوي قيمة موجبة دائماً ٠

مثال (١٩)

ما هي المساحة المحصورة بين المنحنى :

ص = س^{٣} + ٣ س^{٢} -٤ س ، ومحور السينات ؟.

الحل :

لتحديد حدود التكامل نحسب نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات ، وذلك بوضع ص = صفر في معادلة المنحنى :

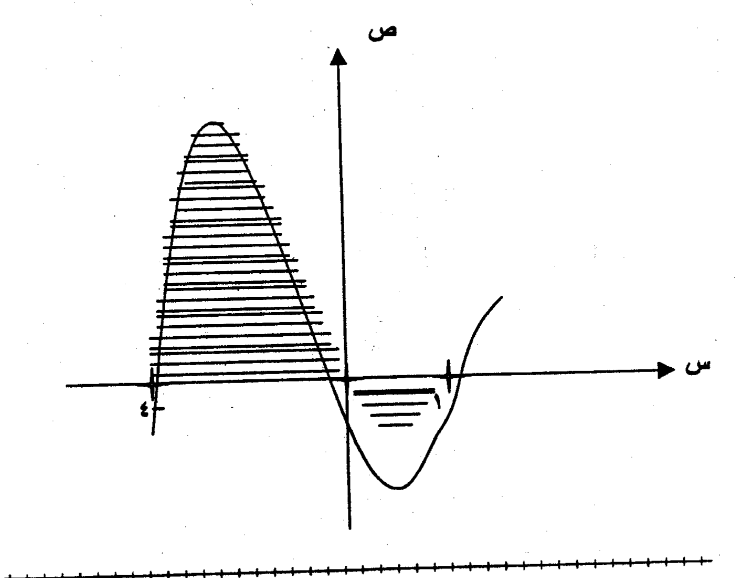
∴ س^{٣} + ٣ س^{٢} -٤ س = صفر

∴ س (س^{٢} + ٣ س -٤) = صفر

∴ س (س-١) (س+٤) = صفر

∴ إما س = صفر أو س= ١ أو س= -٤

وعلى ذلك فإن المنحنى يقطع محور السينات عند س=-٤ ، صفر ، ١ على التوالي على النحو التالي :



∴ المساحة =

$$= \int_{-٤}^{صفر} (س^٣ + ٣س^٢ - ٤س) \cdot د س + \int_{صفر}^{١} (س^٣ + ٣س^٢ - ٤س) \cdot د س$$

$$= \left[\frac{١}{٤}س^٤ + \frac{٣}{٣}س^٣ - \frac{٤}{٢}س^٢\right]_{-٤}^{صفر} + \left[\frac{١}{٤}س^٤ + \frac{٣}{٣}س^٣ - \frac{٤}{٢}س^٢\right]_{صفر}^{١}$$

$$= [\,صفر - (٣٢)\,] + [\,-\frac{٣}{٤} - (صفر)\,]$$

$$= -٣٢ - \frac{٣}{٤} = -٣٢\frac{٣}{٤} = \boxed{٣٢\frac{٣}{٤}} \text{ وحدة}$$

مثال (٢٠)

ما هي المساحة أسفل المنحنى : ص = $س^٢$ - ٢ س -٣ ؟.

الحل :

بوضع ص = صفر في معادلة المنحنى :

∴ $س^٢$ - ٢ س -٣ = صفر

∴ (س-٣) (س+١) = صفر ∴ إما س = -١ أو س= ٣

$$∴ المساحة = \int_{-١}^{٣} (س^٢ - ٢س - ٣) \cdot د س$$

$$= \left[\frac{١}{٣}س^٣ - \frac{٢}{٢}س^٢ - ٣س\right]_{-١}^{٣} = \left[\frac{١}{٣}س^٣ - س^٢ - ٣س\right]_{-١}^{٣}$$

$$= \left[\frac{١}{٣}(٣)^٣ - (٣)^٢ - ٣(٣)\right] - \left[\frac{١}{٣}(-١)^٣ - (-١)^٢ - ٣(-١)\right]$$

$$= [\,٩ - ٩ - ٩\,] - \left[-\frac{١}{٣} - ١ + ٣\right]$$

$$= -٩ - \frac{٥}{٣} = -١٠\frac{٢}{٣} = \boxed{١٠\frac{٢}{٣}} \text{ وحدة مساحة}$$

(٨-٦) التطبيقات التجارية والإقتصادية على التكامل :

لا تختلف التطبيقات الإقتصادية أو التجارية للتكامل عن مثيلتها في حالة التفاضل ، ونذكر الطالب في هذا المجال بأن التكامل هو العملية العكسية للتفاضل ، فعلى سبيل المثال ، كما أمكن من قبل (باستخدام التفاضل) الحصول على ميل المماس لمنحنى أي دالة بإيجاد المشتقة الأولى لهذه الدالة ، فإنه يمكننا (باستخدام التكامل) إيجاد الدالة الأصلية بمعلومية ميل المماس لمنحنى الدالة .

وكما أمكن من قبل (باستخدام التفاضل) الحصول على الإيراد الحدي (أو التكلفة الحدية) بإيجاد المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي (أو التكلفة الكلية) ، فإنه يمكننا (باستخدام التكامل) إيجاد دالة الإيراد الكلي أو (التكلفة الكلية) بمعلومية الإيراد الحدي (أو التكلفة الحدية) . وفي هذا الجزء نتناول أهم التطبيقات التجارية والإقتصادية للتكامل .

مثال (٢١)

إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة ما هو (٢ س - ١) فأوجد معادلة هذا المنحنى إذا علمت أن المنحني يمر بالنقطة (١ ، ٣) ؟.

الحل :

بفرض أن معادلة المنحنى هي ص ، فإن :

معادلة المنحنى = تكامل الميل

∴ ص = ∫ (الميل) . ء س

= ∫ (٢ س - ١) . ء س

$= \frac{٢}{٢}$ س^{٢} − س + أ

= س^{٢} − س + أ

وحيث أن المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٣) ، فإن :

٣ = (١)^{٢} − (١) + أ

∴ أ = ٣

∴ معادلة المنحنى هي :

ص = س^{٢} − س + ٣

مثال (٢٢)

أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (١ ، −٣) وميل المماس له عند أي نقطة عليه = ٦ س^{٢} + ٦ س + ٥

الحل :

معادلة المنحنى = تكامل الميل ، وبفرض أن معادلة المنحنى هي ص ، فإن :

ص = $\int$ (الميل) . د س

= $\int$ (٦ س^{٢} + ٦ س + ٥) . د س

= $\frac{٦}{٣}$ س^{٣} + $\frac{٦}{٢}$ س^{٢} + ٥ س + أ

= ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٥ س + أ

وحيث أن المنحنى يمر بالنقطة (١ ، −٣) ، فإن :

−٣ = ٢(١)^{٣} + ٣(١)^{٢} + ٥(١) + أ

∴ أ = − ١٣

∴ معادلة المنحنى هي :

ص = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٥ س − ١٣

مثال (٢٣)

إذا كانت دالة الإيراد الحدي لمبيعات (س) وحدة من منتج معين يساوي (١٢ جنيه) ، وأن التكلفة الحدية عند هذا المستوى (٢) ، فاوجد كل من الدوال التالية كدالة في حجم الإنتاج (س) :

١. دالة الإيراد الكلي

٢. دالة التكلفة الكلية

٣. دالة الربح الكلي

الحل :

(١) دالة الإيراد الكلي :

الإيراد الحدي = يَ = ١٢

∴ الإيراد الكلي = تكامل دالة الإيراد الحدي

∴ ي = ∫ (يَ). د س = ∫ (١٢) . د س

∴ ي = ١٢ س + أ

وبديهي أن الإيراد يساوي صفراً (وكذلك التكلفة والربح) عندما يكون عدد الوحدات المنتجة (س) يساوي صفر ، وعلى ذلك بالتعويض عن (ي) = صفر عند (س) = صفر ، يكون :

صفر = ١٢ (صفر) + أ

∴ أ = صفر

وعلى ذلك تكون دالة الإيراد الكلي هي :

ي = ١٢ س

(٢) دالة التكلفة الكلية :

التكلفة الحدية = $\overline{ت}$ = ٢

∴ التكلفة الكلية = تكامل دالة التكلفة الحدية

∴ ت = $\int$ ($\overline{ت}$). د س = $\int$ (٢) . د س

∴ ت = ٢ س + أ

وبديهي أن (ت) = صفر عند (س) = صفر ، وعلى ذلك ، يكون :

صفر = ٢ (صفر) + أ ∴ أ = صفر

وعلى ذلك تكون دالة التكلفة الكلية هي : **ت = ٢ س**

(٣) دالة الربح الكلي :

دالة الربح الكلي = دالة الإيراد الكلي - دالة التكلفة الكلية

∴ ر = ي - ت

∴ ر = ١٢ س - ٢ س ∴ ر = ١٠ س

وعلى ذلك تكون دالة الربح الكلي هي : **ر = ١٠ س**

طريقة أخرى :

الربح الحدي = الإيراد الحدي - التكلفة الحدية

∴ $\overline{ر}$ = ١٢ - ٢ = ١٠

∴ الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي

∴ ر = $\int$ ($\overline{ر}$). د س = $\int$ (١٠) . د س

∴ ر = ١٠ س + أ

و بالتعويض عن (ر) = صفر عند (س) = صفر ، يكون :

صفر = ١٠ (صفر) + أ

∴ أ = صفر

وعلى ذلك تكون دالة الربح الكلي هي : **ر = ١٠ س**

مثال (٢٤)

إذا كانت مرونة الطلب على سلعة معينة هو $\left(-\frac{١}{٤}\right)$ ، حيث أن الكمية المطلوبة من هذه السلعة تساوي (١٠٠) وحدة عند سعر قدره (١٠) جنيه ، فاوجد دالة الطلب على هذه السلعة ؟.

الحـل :

$$\because \text{م ط} = \frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{س}}{\text{ط}}$$

وبالتعويض عن : س = ١٠ ، ط = ١٠٠ ، م ط = $-\frac{١}{٤}$

$$\therefore -\frac{١}{٤} = \frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} \times \frac{١٠}{١٠٠}$$

$$\therefore \frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} = -\frac{١}{٤} \times \frac{١٠٠}{١٠} = -\frac{١}{٢}\text{٢}$$

$$\therefore \text{دالة الطلب} = \text{ط} = \int \left(\frac{\text{ءط}}{\text{ءس}}\right).\text{ءس}$$

$$= \int \left(-\frac{١}{٢}\text{٢}\right).\text{ءس}$$

$$\therefore \text{ط} = -\frac{١}{٢}\text{٢ س} + \text{أ}$$

و بالتعويض عن (ط) = ١٠٠ عند (س) = ١٠ ، يكون :

$$١٠٠ = -\frac{١}{٢}\text{٢} (١٠) + \text{أ} \qquad \therefore \text{أ} = ١٢٥$$

وعلى ذلك تكون دالة الطلب هي : $\boxed{\text{ط} = -\frac{١}{٢}\text{٢ س} + ١٢٥}$

سعر التوازن وفائض المستهلك :

سعر التوازن هو السعر الذي تتساوى عنده الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة ، فبفرض أن :

ط : الكمية المطلوبة من سلعة ما •

ع : الكمية المعروضة من سلعة ما •

س١ : سعر التوازن •

فإن سعر التوازن (س١) يتحدد عندما تتساوى دالة الطلب مع دالة العرض ، أي عندما (ط = ع)

وبفرض أن منحنى الطلب : ط = د (س) يمس محور السعر (س) عند نقطة معينة ، ولتكن (س٢) ، فعندئذ يمكننا تحديد فائض المستهلك كما يلي :

$$\text{فائض المستهلك} = \int_{س_1}^{س_2} (\text{دالة الطلب})\ .\ \text{ء س}$$

مثال (٢٥)

بفرض أن دالة الطلب على سلعة ما (كدالة في السعر) هي :

$$ط = س^2 - ٤٠\ س + ٤٠٠$$

وأن دالة العرض على السلعة (كدالة في السعر أيضاً) هي :

$$ع = ١٠\ س$$

المطلوب :

١. إيجاد سعر التوازن ؟•

٢. تحديد فائض المستهلك عند سعر (٢٠) جنيه ؟•

الحـــل :

يتحدد سعر التوازن عندما : ط = ع

وعلى ذلك فإن :

س^{٢} − ٤٠ س + ٤٠٠ = ١٠ س

∴ س^{٢} − ٥٠ س + ٤٠٠ = صفر

وبحل هذه المعادلة يتضح أن :

سعر التوازن (س$_{١}$) = ١٠ جنيه أو = ٤٠ جنيه

وحيــث أن المطلــوب تحديــد فــائض المستهلك عند سعر (٢٠) جنيه ، فإننا سنعتبر أن :

س$_{١}$ = ١٠ ، س$_{٢}$ = ٢٠

∵ فائض المستهلك = $\int_{س_١}^{س_٢}$ (دالة الطلب) . د س

∴ فائض المستهلك = $\int_{١٠}^{٢٠}$ (س^{٢} − ٤٠ س + ٤٠٠) . د س

$$= \left[\frac{١}{٣} س^{٣} - ٢٠ س^{٢} + ٤٠٠ س\right]_{١٠}^{٢٠}$$

$$= \left[\frac{١}{٣}(٢٠)^{٣} - ٢٠(٢٠)^{٢} + ٤٠٠(٢٠)\right]$$

$$- \left[\frac{١}{٣}(١٠)^{٣} - ٢٠(١٠)^{٢} + ٤٠٠(١٠)\right]$$

∴ فائض المستهلك = ٣٣٣,٣٤ جنيه .

مثال (٢٦)

بفــرض أن مضاعف الإستثمار في مجتمع ما يساوي (٤) ، المطلوب التعبــير عن كل من الإستهلاك ، والإدخار كدالة في الدخل ، مع افتراض عدم وجود مستوى ثابت لأي منهما ؟٠

الحــل :

∵ مضاعف الإستثمار = م٠ر = $\frac{١}{م٠ح٠ر}$

∴ ٤ = $\frac{١}{م٠ح٠ر}$ ∴ م٠ح٠ر = $\frac{١}{٤}$ = $\boxed{٠,٢٥}$

∴ $\frac{د ر}{د ي}$ = ٠,٢٥

∵ الميل الحدي للإستهلاك (م٠ح٠ك) =١ – الميل الحدي للإدخار

∴ م٠ح٠ك = ١ – ٠,٢٥ = $\boxed{٠,٧٥}$

∴ $\frac{د ك}{د ي}$ = ٠,٧٥

وعلى هذا الأساس نجد أن :

∴ دالة الإدخار = ر = $\int$ ($\frac{د ر}{د ي}$). د ي = $\int$ (٠,٢٥). د ي

∴ ر = ٠,٢٥ ي

∴ دالة الإستهلاك = ك = $\int$ ($\frac{د ك}{د ي}$). د ي = $\int$ (٠,٧٥). د ي

∴ ك = ٠,٧٥ ي

لاحظ أن المستوى الثابت لكل من الإدخار والإستهلاك = صفر٠

تطبيقات تجارية متنوعة على التكامل

التطبيق (١)

إذا كانت دالة التكلفة الحدية لمنتج معين هي :

$\bar{ت} = ٥ س^{٢} + ٣ س + ٥$

حيــث س تمثل عدد الوحدات المنتجة ، المطلوب إيجاد دالة التكاليف الكلية إذا كانت هذه التكاليف = ٥٠٠ جنيه عند إنتاج ٦ وحدات ؟.

الحل :

التكلفة الكلية = تكامل التكلفة الحدية ، وبفرض أن دالة التكلفة الكلية هي ت ، فإن :

$ت = \int (\text{دالة التكلفة الحدية}) . د س$

$= \int (٥ س^{٢} + ٣ س + ٥) . د س$

$= \frac{٥}{٣} س^{٣} + \frac{٣}{٢} س^{٢} + ٥ س + أ$

وحيث أن التكاليف = ٥٠٠ جنيه عند إنتاج ٦ وحدات ، فإنه بالتعويض عن (ت) = ٥٠٠ ، (س) = ٦ ، فإن :

$٥٠٠ = \frac{٥}{٣} (٦)^{٣} + \frac{٣}{٢} (٦)^{٢} + ٥ (٦) + أ$

$٥٠٠ = \frac{٥}{٣} \times ٢١٦ + \frac{٣}{٢} \times ٣٦ + ٥ (٦) + أ$

$\therefore$ أ = ٥٠٠ − ٤٤٤ = ٥٦

$\therefore$ معادلة التكاليف الكلية هي :

$$ت = \frac{٥}{٣} س^{٣} + \frac{٣}{٢} س^{٢} + ٥ س + ٥٦$$

التطبيق (٢)

إذا كانت دالة التكلفة الحدية لمنتج معين هي :

$\overline{ت} = ٠,٠٨ س + ٦$

حيث س تمثل عدد الوحدات المنتجة ، المطلوب إيجاد دالة التكاليف الكلية إذا كانت هذه التكاليف = ١١٤ جنيه عند إنتاج ١٠ وحدات ؟.

الحل :

التكلفة الكلية = تكامل التكلفة الحدية

وبفرض أن دالة التكلفة الكلية هي ت ، فإن :

$ت = \int (\text{دالة التكلفة الحدية}) \, . \, د س$

$= \int (٠,٠٨ س + ٦) \, . \, د س$

$= \frac{٠,٠٨}{٢} س^{٢} + ٦ س + أ$

$= ٠,٠٤ س^{٢} + ٦ س + أ$

وحيث أن التكاليف = ١١٤ جنيه عند إنتاج ١٠ وحدات ، فإن :

$١١٤ = ٠,٠٤(١٠)^{٢} + ٦(١٠) + أ$

$١١٤ = ٠,٠٤ \times ١٠٠ + ٦ \times ١٠ + أ$

$١١٤ = ٤ + ٦٠ + أ$

$\therefore أ = ١١٤ - ٦٤ = ٥٠$

$\therefore$ معادلة التكاليف الكلية هي :

$$\boxed{ت = ٠,٠٤ س^{٢} + ٦ س + ٥٠}$$

التطبيق (٣)

بافتراض أن إحدى الشركات وجدت أن كل من التكلفة الحدية والإيراد الحدي كما يلي : $\bar{ت} = \frac{١}{٥٠} س^{٣} + \frac{١}{٢٠} س^{٢} + \frac{١}{٢} س$

$\bar{ي} = ٤٠٠ - ٠,٢ س$ حيث (س) تمثل حجم الإنتاج

المطلــوب إيجــاد معادلة الربح باستخدام أسلوب التكامل ، وبفرض أن التكلفة الثابتة هي (١٠٠) جنيه .

الحل :

التكلفة الكلية = ت = $\int$ (دالة التكلفة الحدية) . د س

$= \int (\frac{١}{٥٠} س^{٣} + \frac{١}{٢٠} س^{٢} + \frac{١}{٢} س) . د س$

$= \frac{١}{٢٠٠} س^{٤} + \frac{١}{٦٠} س^{٣} + \frac{١}{٤} س^{٢} + أ$

وحيث أن التكلفة الثابتة هي (١٠٠) جنيه

$\therefore$ ت $= \frac{١}{٢٠٠} س^{٤} + \frac{١}{٦٠} س^{٣} + \frac{١}{٤} س^{٢} + ١٠٠$

$\therefore$ ت $= ٠,٠٠٥ س^{٤} + ٠,٠١٧ س^{٣} + ٠,٢٥ س^{٢} + ١٠٠$

الإيراد الكلي = ي = $\int$ (دالة الإيراد الحدي) . د س

$= \int (٤٠٠ - ٠,٢ س) . د س$

$= ٤٠٠ س - ٠,١ س^{٢}$ (حيث أن (أ) = صفر)

الربح = الإيراد الكلي – التكاليف الكلية

$= (٤٠٠ س - ٠,١ س^{٢})$

$- (٠,٠٠٥ س^{٤} + ٠,٠١٧ س^{٣} + ٠,٢٥ س^{٢} + ١٠٠)$

$\therefore$ ر $= ٤٠٠ س - ٠,٣٥ س^{٢} - ٠,٠١٧ س^{٣} - ٠,٠٠٥ س^{٤} + ١٠٠$

التطبيق (٤).

إذا كانت دالة الإيراد الحدي لمبيعات (س) وحدة من منتج معين هي :

$\bar{ي} = ١٠٠٠ - ١٠ س$

المطلـــوب إيجــاد الإيراد الكلي والإيراد المتوسط عند مستوى إنتاجي (١٠٠) وحدة ؟.

الحل :

الإيراد الكلي = ي = $\int$ (دالة الإيراد الحدي) . د س

= $\int$ (١٠٠٠ - ١٠ س) . د س

= ١٠٠٠ س - ٥ $س^{٢}$ + أ

∴ ي = ١٠٠٠ س - ٥ $س^{٢}$

(حيث أن (أ) = صفر لأن (ي) = صفر عند (س) = صفر)

وعلى ذلك ، عند مستوى إنتاجي (س=١٠٠) ، فإن :

∴ الإيراد الكلي = ي = ١٠٠٠ (١٠٠) - ٥ $(١٠٠)^{٢}$ = ٥٠٠٠٠ وحدة

ومن ناحية أخرى :

الإيراد المتوسط = $\frac{ي}{س}$

= $\frac{١٠٠٠ س - ٥ س^{٢}}{س}$

= ١٠٠٠ - ٥ س

وعلى ذلك ، عند مستوى إنتاجي (س=١٠٠) ، فإن :

الإيراد المتوسط = ١٠٠٠ - ٥ (١٠٠)

= ١٠٠٠ - ٥٠٠

= ٥٠٠ وحدة نقد

التطبيق (٥)

بفـرض أن الإيراد الحدي الذي تحققه إحدى الشركات من إنتاج وبيع (س) وحـدة مـن منتج معين يساوي (١٠ س) ، وأن التكلفة الحدية عند هذا المستوى الإنتاجي (٥ س) ، فاوجد كل من الدوال التالية كدالة في حجم الإنتاج (س) :

١. دالة الإيراد الكلي
٢. دالة التكلفة الكلية
٣. دالة الربح الكلي

الحل :

(١) دالة الإيراد الكلي :

الإيراد الحدي = يَ = ١٠ س

∴ الإيراد الكلي = تكامل دالة الإيراد الحدي

∴ ي = ∫ (يَ). د س = ∫ (١٠ س) . د س

∴ ي = ٥ س^{٢} + أ

وبديهـي أن الإيراد يساوي صفراً (وكذلك التكلفة والربح) عندما يكون عدد الوحدات المنتجة (س) يساوي صفر ، وعلى ذلك بالتعويض عن (ي) = صفر عند (س) = صفر ، يكون :

صفر = ٥ (صفر) + أ ∴ أ = صفر

وعلى ذلك تكون دالة الإيراد الكلي هي :

ي = ٥ س^{٢}

(٢) دالة التكلفة الكلية :

التكلفة الحدية = $\overline{ت}$ = ٥ س

∴ التكلفة الكلية = تكامل دالة التكلفة الحدية

∴ ت = $\int (\overline{ت}) . د س = \int (٥ س) . د س$

∴ ت = ٢,٥ $س^{٢}$ + أ

وبديهي أن (ت) = صفر عند (س) = صفر ، وعلى ذلك ، يكون :

صفر = ٢,٥ (صفر) + أ ∴ أ = صفر

وعلى ذلك تكون دالة التكلفة الكلية هي : **ت = ٢,٥ $س^{٢}$**

(٣) دالة الربح الكلي :

دالة الربح الكلي = دالة الإيراد الكلي - دالة التكلفة الكلية

∴ ر = ي - ت

∴ ر = ٥ $س^{٢}$ - ٢,٥ $س^{٢}$ ∴ ر = ٢,٥ $س^{٢}$

وعلى ذلك تكون دالة الربح الكلي هي : **ر = ٢,٥ $س^{٢}$**

طريقة أخرى :

الربح الحدي = الإيراد الحدي - التكلفة الحدية

∴ $\overline{ر}$ = ١٠ س - ٥ س = ٥ س

∴ الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي

∴ ي = $\int (\overline{ر}) . د س = \int (٥ س) . د س$

∴ ر = ٢,٥ $س^{٢}$ + أ

و بالتعويض عن (ر) = صفر عند (س) = صفر ، يكون :

صفر = ٢,٥ (صفر) + أ

∴ أ = صفر

وعلى ذلك تكون دالة الربح الكلي هي : **ر = ٢,٥ $س^{٢}$**

التطبيق (٦)

بافتراض أن شركة صناعية وجدت أن كل من التكلفة الحدية والإيراد الحدي كما يلي :

$\overline{ت}$ = ٠,٢ س^{٢} + ٠,٠٥ س

$\overline{ي}$ = ٥٠٠ − ٠,١ س　　　　حيث (س) تمثل حجم الإنتاج

المطلوب إيجاد معادلة الربح باستخدام أسلوب التكامل ؟.

الحل :

** التكلفة الكلية = ت = $\int$ (دالة التكلفة الحدية) . د س

= $\int$ (٠,٢ س^{٢} + ٠,٠٥ س) . د س

= $\frac{٠,٢}{٣}$ س^{٣} + $\frac{٠,٠٥}{٢}$ س^{٢}

∴ ت = ٠,٠٧ س^{٣} + ٠,٠٢٥ س^{٢}

** الإيراد الكلي = ي = $\int$ (دالة الإيراد الحدي) . د س

= $\int$ (٥٠٠ − ٠,١ س) . د س

= ٥٠٠ س − ٠,٠٥ س^{٢}

∴ ي = ٥٠٠ س − ٠,٠٥ س^{٢}

** الربح = الإيراد الكلي − التكاليف الكلية

= (٥٠٠ س − ٠,٠٥ س^{٢}) − (٠,٠٧ س^{٣} + ٠,٠٢٥ س^{٢})

∴ ر = ٥٠٠ س − ٠,٠٥ س^{٢} − ٠,٠٧ س^{٣} − ٠,٠٢٥ س^{٢}

∴ ر = ٥٠٠ س − ٠,٠٧٥ س^{٢} − ٠,٠٧ س^{٣}

التطبيق (٧)

إذا كانت دالة الإيراد الحدي لمبيعات منتج معين هي :

$$\overline{\text{ي}} = ٣\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ٦$$

حيــث س تمــثل السعر ، المطلوب تحديد التغير الذي يطرأ على دالة الإيراد الكلي بزيادة السعر من ٣ إلى ٥ وحدات نقد ؟

الحل :

الإيــراد الكلي = تكامل دالة الإيراد الحدي ، وبالتالي يمكن تحديد التغير الذي يطرأ على دالة الإيراد الكلي بزيادة السعر من ٣ إلى ٥ وحدات نقد من خلال التكامل المحدود لدلة الإيراد الحدي بين النقطتين س = ٣ ، س = ٥ ، وعلى ذلك بفرض أن دالة الإيراد الكلي هي (ي) ، فإن :

$$\text{التغير في الإيراد الكلي} = \int_{٣}^{٥} (\overline{\text{ي}})\,.\,\text{د س}$$

$$= \int_{٣}^{٥} (٣\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ٦)\,.\,\text{د س}$$

$$= \left[\frac{٣}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{٢}{٢}\text{س}^{٢} + ٦\text{س}\right]_{٣}^{٥}$$

$$= \left[\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٦\text{س}\right]_{٣}^{٥}$$

$$= [\,(٥)^{٣} - (٥)^{٢} + ٦(٥)\,] - [\,(٣)^{٣} - (٣)^{٢} + ٦(٣)\,]$$

$$= [\,١٢٥ - ٢٥ + ٣٠\,] - [\,٢٧ - ٩ + ١٨\,]$$

$$= ١٣٠ - ٣٦ = ٩٤$$

التطبيق (٨)

إذا كانت دالة الإيراد الحدي لمبيعات منتج معين تمثلها المعادلة :

$\overline{ي} = -٠,٠٥ س + ٤٠$

حيث س تمثل عدد الوحدات المباعة ، المطلوب :

١. تحديد الإيراد الكلي نتيجة بيع ١٠٠ وحدة من هذا المنتج ؟.

٢. الإيراد الإضافي الناتج من زيادة المبيعات من ١٠٠ إلى ١٢٠ وحدة ؟.

الحل :

الإيــراد الكلي = تكامل دالة الإيراد الحدي ، وبالتالي يمكن تحديد الإيراد الكلي نتيجة بيع ١٠٠ وحدة من المنتج من خلال التكامل المحدود لدلة الإيراد الحدي بين النقطتين س=صفر ، س=١٠٠ ، وعلى ذلك فإن :

الإيراد الكلي نتيجة بيع ١٠٠ وحدة =

$$= \int_{صفر}^{١٠٠} (\overline{ي}) . ء س = \int_{صفر}^{١٠٠} (-٠,٠٥ س + ٤٠) . ء س$$

$$= \left[-\frac{٠,٠٥}{٢} س^{٢} + ٤٠ س \right]_{صفر}^{١٠٠} = \left[-٠,٠٢٥ س^{٢} + ٤٠ س \right]_{صفر}^{١٠٠}$$

$$= [-٠,٠٢٥ (١٠٠)^{٢} + ٤٠ (١٠٠)] - [صفر]$$

$$= [-٢٥٠ + ٤٠٠٠] - [صفر] = \boxed{٣٧٥٠}$$

الإيراد الإضافي الناتج من زيادة المبيعات من ١٠٠ إلى ١٢٠ وحدة =

$$= \int_{١٠٠}^{١٢٠} (\overline{ي}) . ء س = \int_{١٠٠}^{١٢٠} (-٠,٠٥ س + ٤٠) . ء س$$

$$= \left[-٠,٠٢٥ س^{٢} + ٤٠ س \right]_{١٠٠}^{١٢٠}$$

$$= -٣٦٠ + ٤٨٠٠ - ٣٧٥٠ = \boxed{٦٩٠}$$

التطبيق (٩)

شركة النصر لصناعة السيارات وجدت أن المعدل السنوي لمصروفات الصيانة (ص) هو دالة في عمر السيارة (س) وتمثله المعادلة :

$$\overline{ص} = ١٠٠٠ + ١٥ س^٢$$

المطلــوب : تقدير مصروفات الصيانة المتوقعة خلال السنوات العشر الأولى من عمر السيارة ، ثم احسب المصروفات المتوقعة للسنة العاشرة ؟.

الحل :

مصروفات الصيانة المتوقعة خلال السنوات الخمس الأولى =

$$= \int_{صفر}^{١٠} (\overline{ص}) . د س = \int_{صفر}^{١٠} (١٠٠٠ + ١٥ س^٢) . د س$$

$$= \left[١٠٠٠ س + \frac{١٥}{٣} س^٣ \right]_{صفر}^{١٠}$$

$$= [١٠٠٠(١٠) + \frac{١٥}{٣}(١٠)^٣] - [صفر]$$

$$= [١٠٠٠٠ + ٥٠٠٠] - [صفر] = \boxed{١٥٠٠٠ \text{ جنيه}}$$

مصروفات الصيانة للسنة العاشرة =

$$= \int_{٩}^{١٠} (١٠٠٠ + ١٥ س^٢) . د س$$

$$= \left[١٠٠٠ س + \frac{١٥}{٣} س^٣ \right]_{٩}^{١٠}$$

$$= ١٥٠٠٠ - [١٠٠٠(٩) + \frac{١٥}{٣}(٩)^٣]$$

$$= ١٥٠٠٠ - [٩٠٠٠ + ٣٦٤٥]$$

$$= ١٥٠٠٠ - ١٢٦٤٥ = \boxed{٢٣٥٥ \text{ جنيه}}$$

التطبيق (١٠)

بفرض أن منحنى الطلب على سلعة ما هو :

ع = ٢٥٠ - ٢ س

حيث (ع) يمثل سعر الوحدة ، (س) تمثل كمية الطلب من السلعة ، وبفرض أن سعر التوازن لهذه السلعة = ١٥٠ جنيه ،أوجد فائض المستهلك ؟.

الحـــل :

∵ السعر في حالة توازن ، فيمكن إيجاد الكمية التوازنية كما يلي :

١٥٠ = ٢٥٠ - ٢ س

∴ س = ٥٠ وحدة .

وعلى ذلك فإن :

ما يدفعه المستهلك = ٥٠ × ١٥٠ = ٧٥٠٠

ما كان يجب أن يدفعه = $\int_{٠}^{٥٠}$ **(٢٥٠ - ٢ س) . د س**

= $\left[٢٥٠ س - س^{٢} \right]_{٠}^{٥٠}$

=٢٥٠ × ٥٠ - (٥٠)^{٢} **= ١٠٠٠٠**

∴= فائض المستهلك = $\int_{٠}^{٥٠}$ **(٢٥٠ - ٢ س) . د س - ٧٥٠٠**

= ١٠٠٠٠ - ٧٥٠٠

= ٢٥٠٠ جنيه

التطبيق (١١)

بفرض أن منحنى العرض لسلعة ما يتحدد بالعلاقة التالية :

ع = ٠,٣ س^{٢} + ١٥

حيث (ع) يمثل سعر الوحدة ، (س) الكمية ، وأن السعر في حالة التوازن = ٢٩,٧ ، أوجد فائض المنتج ؟٠

الحـــل :

∵ السعر في حالة توازن ، فيمكن إيجاد الكمية التوازنية كما يلي :

٢٩,٧ = ٠,٣ س^{٢} + ١٥

∴ ١٤,٧ = ٠,٣ س^{٢}

∴ س^{٢} = ١٤,٧ × $\frac{١٠}{٣}$ = ٤٩

∴ س = ٧ وحدات ، وهي تمثل كمية التوازن ٠

وعلى ذلك فإن :

ما يحصل عليه المنتج = ٧ × ٢٩,٧ = ٢٠٧,٩

ما كان يرغب في أن يحصل عليه = $\int_{٠}^{٧}$ (٠,٣ س^{٢} + ١٥) . د س

= $\left[٠,١٥ س^{٣} + ١٥س\right]_{٠}^{٧}$

= ٣٤,٣ + ١٠٥ = ١٣٩,٣

∴ فائض المنتج = ٢٠٧,٩ − $\int_{٠}^{٧}$ (٠,٣ س^{٢} + ١٥) . د س

= ٢٠٧,٩ − ١٣٩,٣ = ٦٨,٦ جنيه

التطبيق (١٢)

بفرض أن منحنى الطلب على سلعة ما هو : ط = ١٥ - س

وأن منحنى العرض على السلعة هو : ع = ٥ + س

المطلوب : تحديد فائض المستهلك ، وفائض المنتج عند توازن السوق ؟.

الحـــل :

يتحدد سعر التوازن عندما : ط = ع

وعلى ذلك فإن : ١٥ – س = ٥ + س

∴ س = ٥ ، ∴ ع = ٥ + ٥ = ١٠

وعند التوازن ما يدفعه المستهلك = مجموع ما يحصل عليه المنتج

= ٥ × ١٠ = ٥٠

$\therefore$ فائض المستهلك = $\int_{٠}^{٥}$ (١٥ – س) . ءس – ٥٠

= $\left[١٥ س – ٠,٥ س^{٢}\right]_{٠}^{٥}$ – ٥٠ = (١٥ × ٥) – ١٢,٥ – ٥٠

= ٦٢,٥ – ٥٠ = ١٢,٥

$\therefore$ فائض المنتج = ٥٠ – $\int_{٠}^{٥}$ (٥ + س) . ءس

= ٥٠ – $\left[٥ س + ٠,٥ س^{٢}\right]_{٠}^{٥}$

= ٥٠ – (٢٥ + ١٢,٥) = ١٢,٥ جنيه

التطبيق (١٣)

إذا كانت دالة التكلفة الحدية لإنتاج شركة الهادي للملابس هي :

$\bar{ت} = ٠,٠٨ \, س^{٢} - ٠,٤ \, س + ٧$

حيث س تمثل حجم الإنتاج ، المطلوب إيجاد دالة التكاليف الكلية علماً بأن التكاليف الثابتة = ١٥٠٠٠ جنيه ، ثم اوجد دالة التكاليف المتوسطة ؟.

الحل :

التكلفة الكلية = $\int (\bar{ت}) . د س$

وبفرض أن التكلفة الكلية هي ت ، فإن :

$ت = \int (٠,٠٨ \, س^{٢} - ٠,٤ \, س + ٧) . د س$

$= \frac{٠,٠٨}{٣} س^{٣} - \frac{٠,٤}{٢} س^{٢} + ٧ س + أ$

$= \frac{٠,٠٨}{٣} س^{٣} - ٠,٢ \, س^{٢} + ٧ س + أ$

وحيث أن التكاليف الثابتة = ١٥٠٠٠ جنيه ، فإن :

∴ معادلة التكاليف الكلية هي :

$ت = \frac{٠,٠٨}{٣} س^{٣} - ٠,٢ \, س^{٢} + ٧ س + ١٥٠٠٠$

وبقسمة التكاليف الكلية على عدد الوحدات المنتجة (س) تنتج التكاليف المتوسطة ، وعلى ذلك فإن :

∴ معادلة التكاليف المتوسطة هي :

التكاليف المتوسطة $= \frac{٠,٠٨}{٣} س^{٢} - ٠,٢ \, س + ٧ + \frac{١٥٠٠٠}{س}$

التطبيق (١٤)

إذا كانت منحنى التكلفة الحدية لمنتج معين هي :

$\overline{ت} = ٢ + ٣ س + ٤ س^{٣}$

حيث س تمثل حجم الإنتاج ، المطلوب إيجاد دالة التكاليف الكلية علماً بـأن هذه التكاليف = ١٠٠٠ جنيه عند س = صفر ، ثم اوجد دالة التكاليف المتوسطة ؟.

الحل :

التكلفة الكلية = $\int (\overline{ت})$. د س

وبفرض أن التكلفة الكلية هي ت ، فإن :

$ت = \int (٢ + ٣ س + ٤ س^{٣})$. د س

$= ٢ س + \frac{٣}{٢} س^{٢} + \frac{٤}{٤} س^{٤} + أ$

$= ٢ س + \frac{٣}{٢} س^{٢} + س^{٤} + أ$

وحيث أن التكاليف الكلية = ١٠٠٠ جنيه عند س = صفر ، فإن :

∴ معادلة التكاليف الكلية هي :

$ت = ٢ س + \frac{٣}{٢} س^{٢} + س^{٤} + ١٠٠٠$

وبقسمة التكاليف الكلية على عدد الوحدات المنتجة (س) تنتج التكاليف المتوسطة ، وعلى ذلك فإن :

∴ معادلة التكاليف المتوسطة هي :

التكاليف المتوسطة $= ٢ + \frac{٣}{٢} س + س^{٣} + \frac{١٠٠٠}{س}$

تمارين على الفصل الثامن

(١) اذا كان الايراد الحدى من إنتاج (س) وحدة يساوي ١٠٠٠ – ١٠ س المطلـــوب ايجـــاد مقـــدار الايراد الكلى والايراد المتـــوسط عند مستوى إنتاجي (١٠٠٠) وحدة ؟٠

(٢) بفـــرض أن الإيـــراد الحـــدي الذي تحققه إحدى الشركات من إنتاج وبيع (س) وحـــدة من منتج معين يساوي (١٥ س) ، وأن التكلفة الحدية عند هـــذا المستوى الإنتاجي (١٠ س) ، فاوجد كل من الدوال التالية كدالة في حجم الإنتاج (س) :

i. دالة الإيراد الكلي

ii. دالة التكلفة الكلية

iii. دالة الربح الكلي

(٣) إذا كانـــت مرونة الطلب على سلعة معينة هو $\left(-\frac{١}{٨}\right)$ ، حيث أن الكمية المطلوبة من هذه السلعة تساوي (٢٠٠) وحدة عند سعر قدره (٥) جنيه فاوجد دالة الطلب على هذه السلعة ؟٠وما رأيك فيما إذا كان الطلب على هذه السلعة متكافئ المرونة ؟٠

(٤) وجد منتج أن دوال التكلفة الحدية والايراد الحدي هما :

☒ $\bar{ت}$ = ٢٠٠ – ٠,٤ س

☒ $\bar{ي}$ = ٢٠٠ + ٠,٢ س

١. أوجد التغير فى الايـــراد الناتـــج عن زيادة مستوى المبيعات من ١٠ الى ٥٠ وحدة

٢. اوجد الايراد الناتج عن بيع ٧٠ وحدة

(٥) اذا كانت دالة التكلفة الحدية هى ١٠ + ٠,٠٦ س ودالة الايراد الحدى هى ٤٠ والتكاليف الثابتة = ٤٠٠ جنيها . المطلوب ايجاد كل من الدوال الآتية كدالة فى الكمية المنتجة س = دالة الايراد الكلى ـ دالة التكلفة الكلية ـ دالة الربح الكلى

(٦) اذا كانت مرونة الطلب على سلعة معينة = $-\frac{١}{٤}$ حيث أن الكمية المطلوبة من هذه السلعة تساوى ١٠٠ وحدة عند سعر قدره ١٠ جنيها . المطلوب ايجاد دالة الطلب على هذه السلعة .

(٧) اذا كانت دالة التكاليف الحدية هى $\overline{ت}$ = ٠,٦ س + ٤

حيث س تمثل عدد الوحدات المنتجة . أوجد دالة التكاليف الكلية اذا كانت هذه التكاليف = ١٢٣ جنيها عند انتاج ١٠ وحدات .

(٨) اذا كان الايراد الحدى على الاستثمار فى امكانيات الانتاج للمستويات المختلفة للاستثمار يمكن تعريفه بالمعادلة الآتية :

$$\overline{ي} = (س^٢ + ٤)\ س$$

حيث س مستوى الاستثمار ، $\overline{ي}$ الايراد الحدى للجنيه لمستوى الاستثمار س . والمطلوب ايجاد التغيير الذى سيطرأ على الايراد الكلى بزيادة الاستثمار من ٥ وحدات نقدية إلى ١٠ وحدات نقدية .

(٩) اذا كانت دالة الايراد الحدى لمنتج معين تمثلها العلاقة التالية

$$\overline{ي} = -٠,٢\ س + ٥٠$$

حيث س هى عدد الوحدات المباعة

والمطلوب :

(١) تحدد الايراد الكلى نتيجة بيع ٢٠٠ وحدة

(٢) ما هو الايراد الاضافى اذا زادت المبيعات من ٢٠٠ وحدة الى ٢٥٠ وحدة .

(١٠) بفـرض أن معـدل تغـير حجم الطلب على سلعة معينة بالنسبة إلى سـعرها هو (٢ س − ٤٠) ، حيث أن الكمية المطلوبة من هذه السلعة تساوي (٩٠٠) وحدة عند سعر قدره (٥٠) جنيه ، وأن معدل تغير الكمية المعروضـة مـن هذه السلعة بالنسبة إلى سعرها هو (١٠) ، حيث لا توجد أي كميات ثابتة معروضة من هذه السلعة ، فالمطلوب :

i. إيجاد دالتيْ الطلب والعرض ؟٠

ii. تحديد كمية وسعر التوازن ؟٠

iii. تحديد فائض المستهلك عند سعر (٢٥ جنيه) ؟٠

الفصل التاسع

المحاكاة والتحليلات المالية

- مقدمة.
- إستخدام المحاكاة في تقدير حجم المبيعات لفترة زمنية قادمة.
- إستخدام المحاكاة في التحليل المالي.
- إســـتخدام المحاكـــاة فـــي الـــرقابة على المخزون السلعي.

(٩-١) مقدمة

عندما تُستخدم المحاكاة في التحليلات المالية ، فإن المصطلح المُستخدم هو تحليلات المخاطرة ، والهدف من تحليلات المخاطرة هو الأخذ في الإعتبار تأثير العوامل المختلفة مثل سعر البيع وحجم السوق ومعدل نمو السوق وغير ذلك من العوامل ، وذلك على معامل مالي مثل معدل العائد من الإستثمارات •

ويأخذ نموذج المحاكاة عينات من التوزيعات الإحتمالية لكلٍ من العوامل المختلفة ، ثم يتم بعد ذلك حساب معدل العائد من الإستثمارات • ولكل محاولة ، فإن الناتج هو معدل معين للعائد ، وبالتالي فإن نتيجة عدة محاولات تكون توزيعاً لمعدل العائد من الإستثمارات ، ويمكن من ذلك التوزيع حساب القيمة المتوقعة والإنحراف المعياري لمعدل العائد من الإستثمارات •

ويستخدم الإداريون أسلوب المحاكاة في تحليل سياسات المخزون (بدلالة التكلفة أو الربح المناظر) ، فمن خلال أسلوب المحاكاة يمكن تحليل تأثير السياسات المختلفة للمخزون (مثل التكوينات المختلفة من كمية الطلب ، ونقطة إعادة الطلب) وذلك على النظام الإحتمالي للمخزون •

كما يستخدم الإداريون نماذج المحاكاة في التحليل المالي والإستثمارات والتنبؤ بالمبيعات • ويعتمد الإداريون على الخبراء في الدراسات الكمية لإعداد نماذج رياضية تمثل بقد المستطاع حقائق النظام موضع المحاكاة •

ولعمل نموذج رياضي يمثل نظام معين (النظام موضع المحاكاة) ، يجب إتخاذ الخطوات التالية :

(١) تحديد المشكلة .

(٢) تحديد المتغيرات المتعلقة بالمشكلة .

(٣) بناء النموذج الرياضي .

(٤) وضع برنامج العمل وإجراء التجارب .

(٥) إستخراج النتائج .

(٦) إتخاذ القرار .

ونظراً لإرتباط نظام المحاكاة بعناصر محتملة الوقوع ، فإنه يُطلق عليه محاكاة (مونت كارلو) ، ولإجراء محاكاة مونت كارلو يمكن إتباع الإجراءات التالية :

(١) جمع البيانات عن الظاهرة محل الدراسة وتحويل الأرقام إلى جدول توزيع إحتمالي .

(٢) إعداد جدول توزيع إحتمالي متجمع (صاعد مثلاً) لتسهيل إستخدام الأرقام العشوائية .

(٣) تخصيص عدد من الأرقام العشوائية لكل متغير حسب إحتمال حدوثه .

(٤) إستنتاج الأرقام العشوائية وتحويل كل رقم عشوائي مستنتج إلى قيمة معينة من واقع التخصيص المشار إليه في الإجراء (٣)

الخلاصة:

وخلاصة القول أن نظام المحاكاة يعتمد بصفة أساسية على تجميع الإحصاءات عن خبرة كافية في الماضي بالنسبة للظاهرة موضع الدراسة (التي

نرغب في محاكاتها) ، ثم تحويل هذه البيانات الإحصائية إلى توزيع إحتمالي ، ثم الحصول على التوزيع الإحتمالي المتجمع ، ثم نخصص أرقام عشوائية لكل متغير حسب إحتمال حدوثه ، ثم إنتاج الأرقام العشوائية عن عدد معين من الأيام ، وتحويل هذه الأرقام المنتجة إلى قيم عن كل يوم من الأيام القادمة (المستقبلة) وذلك بفرض أن خبرة الماضي ستستمر في المستقبل.

وفي هذه الدراسة يمكن إستخدام نموذج المحاكاة فيما يلي :

(١) إستخدام المحاكاة في تقدير حجم المبيعات لفترة زمنية قادمة.

(٢) إستخدام المحاكاة في التحليل المالي.

(٣) إستخدام المحاكاة في الرقابة على المخزون السلعي.

ونتناول فيما يلي أمثلة تطبيقية لتوضيح التطبيق العملي لنظام المحاكاة في حياتنا العملية .

(٩-٢) إستخدام المحاكاة في تقدير حجم المبيعات لفترة زمنية قادمة

مثال (١)

لتوضيح كيفية إستخدام نظام المحاكاة في التقدير المستقبلي لحجم المبيعات ولفترة زمنية قادمة نسوق المثال العملي التالي :

بفرض أن أحد وكلاء إحدى شركات السيارات يريد أن يقدر حجم المبيعات خلال فترة زمنية قادمة ، ولتكن سنة قادمة ، باستخدام نظام المحاكاة ، ولتحقيق هذا الغرض أمكن الحصول على أرقام المبيعات خلال السنة الماضية للعمل (٣٠٠ يوم عمل) ، كما أمكن تلخيص هذه المبيعات في الجدول التالي :

عدد السيارات المباعة (س)	عدد الأيام (التكرار) (ك)
صفر	١٥
١	٧٥
٢	٩٠
٣	٦٠
٤	٤٥
٥	١٥
المجموع	٣٠٠

والمطلوب تقدير المبيعات خلال (١٠) عشرة أيام قادمة ؟.

ملحوظة : يمكنك إستخدام الأرقام العشوائية التالية المستخرجة من جدول الأرقام العشوائية :

٧٨ ، ٢٨ ، ٠٨ ، ٠٢ ، ٢٣ ، ٥٤ ، ٥٧ ، ٠٠ ، ٨٤ ، ٩٥

الحــل :

لحل هذا المثال نمر بالخطوات السابق إيضاحها في المقدمة على النحو التالي :

(١) تحويل جدول التوزيع التكرارى إلى جدول توزيع إحتمالي بقسمة كل تكرار ÷ مجموع التكرارات (٣٠٠) ، فتكون على الترتيب :

$$\frac{١٥}{٣٠٠} = ٠,٠٥ \qquad \frac{٧٥}{٣٠٠} = ٠,٢٥ \qquad \frac{٩٠}{٣٠٠} = ٠,٣٠$$

$$\frac{٦٠}{٣٠٠} = ٠,٢٠ \qquad \frac{٤٥}{٣٠٠} = ٠,١٥ \qquad \frac{١٥}{٣٠٠} = ٠,٠٥$$

(٢) إيجاد الإحتمال المتجمع الصاعد بتجميع الإحتمالات السابقة (التي تسبق النقطة موضع التجميع)

(٣) تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع

ومن هنا يمكن تكوين الجدول التالي :

عدد السيارات المباعة (س)	عدد الأيام (التكرار) (ك)	الإحتمال (ح)	الإحتمال المجمع	الأرقام العشوائية
صفر	١٥	٠,٠٥	٠,٠٥	من ٠٠: ٠٤
١	٧٥	٠,٢٥	٠,٣٠	من ٠٥: ٢٩
٢	٩٠	٠,٣٠	٠,٦٠	من ٣٠: ٥٩
٣	٦٠	٠,٢٠	٠,٨٠	من ٦٠: ٧٩
٤	٤٥	٠,١٥	٠,٩٥	من ٨٠: ٩٤
٥	١٥	٠,٠٥	١,٠٠	من ٩٥: ٩٩
المجموع	٣٠٠	١,٠٠		

(٤) بعد تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع من الجدول السابق ، يتم ترجمة الأرقام العشوائية المستخرجة (أو المنجة) حسب كل رقم يقع في أي فئة في عمود الأرقام العشوائية المخصصة :

فمثلاً : ٧٨ تقع في الفئة [٦٠ : ٧٩] والتي يقابلها ٣ سيارات مباعة ٠

٢٨ تقع في الفئة [٠٥ : ٢٩] والتي يقابلها سيارة واحدة مباعة

٠٨ تقع في الفئة [٠٥ : ٢٩] والتي يقابلها سيارة واحدة مباعة

٠٢ تقع في الفئة [٠٠ : ٠٥] والتي يقابلها صفر سيارة مباعة

وهكذا ، ٠٠٠٠

وعلى ذلك يمكن تصوير الجدول التالي :

الأرقام العشوائية المستخرجة (أو المنتجة)	عدد السيارات المباعة
٧٨	٣
٢٨	١
٠٨	١
٠٢	صفر
٢٣	١
٥٤	٢
٥٧	٢
٠٠	صفر
٨٤	٤
٩٥	٥

وعلى ذلك يكون متوسط عدد السيارات المباعة عن العشرة أيام القادمة من واقع نظام المحاكاة هو :

= (٣+١+١+ صفر+١+٢+٢+ صفر+٤+٥) / ١٠

= ١٩ / ١٠ = ١,٩ سيارة .

ونلاحظ أنه كلما زاد عدد أيام المحاكاة (عدد مفردات العينة) كلما قربت القيم المتوقعة من القيم الفعلية ، والقيم المتوقعة هنا هي عبارة عن مجموع حواصل ضرب كل رقم (عدد السيارات) × إحتماله

∴ القيمة المتوقعة = (صفر× ٠,٠٥) + (١ × ٠,٢٥) + (٢ × ٠,٣٠)
+ (٣ × ٠,٢) (٤ × ٠,١٥) + (٥ × ٠,٠٥)

∴ القيمة المتوقعة = صفر + ٠,٢٥ + ٠,٦٠ + ٠,٦٠ + ٠,٦٠ +٠,٢٥

= ٢,٣ سيارة.

وكما سبق أن أوضحنا ، فإنه كلما زاد عدد أيام المحاكاة كلما إقترب الرقمان السابقان من بعضهما .

مثال (٢)

فيما يلي متوسط وقت أداء الخدمة بورشة أشرف لإصلاح السيارات والإحتمالات الخاصة بها :

متوسط الزمن بالدقائق	الإحتمال
١٥	٠,٢٠
٣٠	٠,٤٠
٦٠	٠,٣٠
١٢٠	٠,١٠

المطلوب إجراء المحاكاة بالنسبة لعشرة حالات لإصلاح السيارات ، بفرض أن الأرقام العشوائية المستخرجة هي :

٧٨ ، ٢٨ ، ٠٨ ، ٠٢ ، ٢٣ ، ٥٤ ، ٥٧ ، ٠٠ ، ٨٤ ، ٩٥

الحــل :

يتم تكوين الجدول التالي :

متوسط الزمن بالدقائق	الإحتمال (ح)	الإحتمال المجمع	الأرقام العشوائية
١٥	٠,٢٠	٠,٢٠	من ٠٠: ٠٩
٣٠	٠,٤٠	٠,٦٠	من ٢٠: ٥٩
٦٠	٠,٣٠	٠,٩٠	من ٦٠: ٨٩
١٢٠	٠,١٠	١,٠٠	من ٩٠: ٩٩

بعد تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع من الجدول السابق ، يتم ترجمة الأرقام العشوائية المستخرجة (أو المنتجة) حسب كل رقم يقع في أي فئة في عمود الأرقام العشوائية المخصصة وتحديد الزمن المقابل كما يلي :

الأرقام العشوائية المستخرجة (أو المنتجة)	الزمن بالدقائق
٧٨	٦٠
٢٨	٣٠
٠٨	١٥
٠٢	١٥
٢٣	٣٠
٥٤	٣٠
٥٧	٣٠
٠٠	١٥
٨٤	٦٠
٩٥	١٢٠

وعلى ذلك يكون متوسط الزمن بالدقائق عن العشرة حالات من إصلاح السيارات من واقع نظام المحاكاة هو :

$$= \frac{٦٠+٣٠+١٥+١٥+٣٠+٣٠+٣٠+١٥+٦٠+١٢٠}{١٠}$$

$$= \frac{٤٠٥}{١٠} = ٤٠,٥$$ دقيقة .

∴ القيمة المتوقعة

= (٠,٢×١٥) + (٠,٤× ٣٠) + (٠,٣ × ٦٠) + (٠,١ × ١٢٠)

∴ القيمة المتوقعة = ٣ + ١٢ + ١٨ + ١٢ = ٤٥ دقيقة .

(٩-٣) إستخدام المحاكاة في التحليل المالي :

مثال (٣)

لتوضيح كيفية إستخدام نظام المحاكاة في التحليل المالي نسوق المثال العملي التالي :

** يرغب جمال إبراهيم المهدي في شراء مشروع تجاري صغير يعمل بالمنطقة ، وقبل الشراء يرغب (جمال) في تقدير الأرباح المتوقعة خلال العشرين (٢٠) شهر القادمة باستخدام نظام المحاكاة إعتماداً على خبرة السنوات السابقة ، وقد أمكن الحصول على البيانات التالية عن المائة شهر الماضية :

التكاليف الشهرية (بالألف)	عدد الشهور	الإيرادات الشهرية (بالألف)	عدد الشهور
٣١	١٥	٣٤	١٠
٣٢	٢٠	٣٥	٢٠
٣٣	٣٥	٣٦	٤٠
٣٤	٢٠	٣٧	٢٠
٣٥	١٠	٣٨	١٠
	١٠٠		١٠٠

بفرض أن الأرقام العشوائية الممكن إستخدامها بالنسبة للإيرادات هي :

٥٧ ، ٩٢ ، ٠٨ ، ٤٦ ، ٧٥ ، ٢٣ ، ٨٨ ، ٦٦ ، ٩٩ ، ٠٧

٠٨ ، ٢٢ ، ٤٥ ، ١٢ ، ٠٥ ، ٠٢ ، ٠٦ ، ٦٥ ، ٩٥ ، ٧٨

وأن الأرقام العشوائية الممكن إستخدامها بالنسبة للتكاليف هي :

٦٨ ، ٧٦ ، ٣١ ، ٤٢ ، ٨٣ ، ١٢ ، ٩٢ ، ٠٥ ، ٣٧ ، ٩٤

٨٢ ، ٦١ ، ٩٨ ، ٤١ ، ٨٨ ، ٣٨ ، ٩٠ ، ٢٩ ، ٥٦ ، ٧٥

فعلى ذلك يمكن للمشتري (المستثمر) تقدير الأرباح المتوقعة لذلك المشروع خلال العشرين (٢٠) شهر القادمة باستخدام نظام المحاكاة إعتماداً على خبرة السنوات السابقة بستخدام نفس طريقة الأمثلة الخاصة بإستخدام نظام المحاكاة في التقدير المستقبلي لحجم المبيعات ، حيث يتم إيجاد الإحتمال والإحتمال المجمع وتخصيص الأرقام العشوائية لكل من التكاليف والإيرادات ، ويتضح ذلك من الجدول التالي :

أولاً : بالنسبة للتكاليف :

التكاليف (بالألف)	الإحتمال (ح)	الإحتمال المجمع	الأرقام العشوائية
٣١	٠,١٥	٠,١٥	من ٠٠: ١٤
٣٢	٠,٢٠	٠,٣٥	من ١٥: ٣٤
٣٣	٠,٣٥	٠,٧٠	من ٣٥: ٦٩
٣٤	٠,٢٠	٠,٩٠	من ٧٠: ٨٩
٣٥	٠,١٠	١,٠٠	من ٩٠: ٩٩
	١,٠٠		

ثانياً : بالنسبة للإيرادات :

الإيرادات (بالألف)	الإحتمال (ح)	الإحتمال المجمع	الأرقام العشوائية
٣٤	٠,١٠	٠,١٠	من ٠٠: ٠٩
٣٥	٠,٢٠	٠,٣٠	من ١٠: ٢٩
٣٦	٠,٤٠	٠,٧٠	من ٣٠: ٦٩
٣٧	٠,٢٠	٠,٩٠	من ٧٠: ٨٩
٣٨	٠,١٠	١,٠٠	من ٩٠: ٩٩
	١,٠٠		

وبعد ذلك يتم ترجمة الأرقام العشوائية المنتجة لكل من التكاليف والإيرادات إلى أرقام للتكاليف والإيرادات ، ووضع النتائج في جدول على النحو التالي :

الشهور	الأرقام العشوائية للإيرادات	الأرقام العشوائية التكاليف	الإيرادات	التكاليف	الربح الشهري
١	٥٧	٦٨	٣٦	٣٣	٣
٢	٩٢	٧٦	٣٨	٣٤	٤
٣	٠٨	٣١	٣٤	٣٢	٢
٤	٤٦	٤٢	٣٦	٣٣	٣
٥	٧٥	٨٣	٣٧	٣٤	٣
٦	٢٣	١٢	٣٥	٣١	٤
٧	٨٨	٩٢	٣٧	٣٥	٢
٨	٦٦	٠٥	٣٦	٣١	٥
٩	٩٩	٣٧	٣٨	٣٣	٥
١٠	٠٧	٩٤	٣٤	٣٥	- ١
١١	٠٨	٨٢	٣٤	٣٤	صفر
١٢	٢٢	٦١	٣٥	٣٣	٢
١٣	٤٥	٩٨	٣٦	٣٥	١
١٤	١٢	٤١	٣٥	٣٣	٢
١٥	٠٥	٨٨	٣٤	٣٤	صفر
١٦	٠٢	٣٨	٣٤	٣٣	١
١٧	٠٦	٩٠	٣٤	٣٥	- ١
١٨	٦٥	٢٩	٣٦	٣٢	٤
١٩	٩٥	٥٦	٣٨	٣٣	٥
٢٠	٧٨	٧٥	٣٧	٣٤	٣

ويمكن توضيح ما جاء بالجدول السابق ، فعلى سبيل المثال ، أول رقم عشوائي للإيراد (٥٧) وهو يعادل إيراد (٣٦) ألف جنيه ، وأول رقم عشوائي للتكاليف (٦٨) وهو يعادل تكلفة (٣٣) ألف جنيه ، والفرق بينهما (٣٦-٣٣) أي (+٣) وهو يمثل صافي الربح الشهري للشهر الأول .

وفي الشهر العاشر ، نجد أن عاشر رقم عشوائي للإيراد (٠٧) وهو يعادل إيراد (٣٤) ألف جنيه ، وعاشر رقم عشوائي للتكاليف (٩٤) وهو يعادل تكلفة (٣٥) ألف جنيه ، والفرق بينهما (٣٤-٣٥) أي (- ١) وهو يمثل صافي الربح الشهري للشهر العاشر .

وهكذا ، ...

وإذا إعتبرنا النموذج الرياضي التالي :

الربح الشهري = الإيراد الشهري - التكاليف الشهرية

يكون التوزيع الإحتمالي للربح الشهري من واقع المحاكاة يصبح كما يلي :

الربح الشهري	عدد الشهور (التكرار) (ك)	الإحتمال (ح)
- ١	٢	٠,١٠
صفر	٢	٠,١٠
١	٢	٠,١٠
٢	٤	٠,٢٠
٣	٤	٠,٢٠
٤	٣	٠,١٥
٥	٣	٠,١٥
	٢٠	١,٠٠

(٩-٤) إستخدام المحاكاة في الرقابة على المخزون السلعي :

إنه لمن المفيد تحليل سياسات المخزون المختلفة (بدلالة التكلفة أو الربح المناظر) وذلك بإستخدام أساليب المحاكاة على سبيل المثال ، يمكن باستخدام المحاكاة تحليل تأثير السياسات المختلفة للمخزون (مثل تكوينات مختلفة من كميات الطلب ونقطة إعادة الطلب) على النظام الإحتمالي للمخزون.

ونسعى من وراء الرقابة على المخزون السلعي إلى تحقيق الأهداف التالية :

(١) التنسيق بين العمليات الإنتاجية المختلفة وضمان الإستمرار في الإنتاج بمراحله المختلفة دون توقف أو تعطيل .

(٢) توفير المواد الأولية للإنتاج على مدار السنة إذا كانت المادة الأولية موسمية .

(٣) الحماية من إرتفاع الأسعار على مدار السنة .

(٤) تحقيق التوازن بين العرض والطلب إذا كان الإنتاج موسمياً والسلعة مطلوبة على مدار السنة .

(٥) الحصول على خصم مناسب عند شراء كميات كبيرة .

(٦) تلافي الخسائر الناشئة عن نفاد السلعة على الرغم من وجود الطلب عليها .

(٧) عدم تجميد رأس المال في مواد خام (أولية) طوال العام .

(٨) الهدف العام يتمثل في مضاعفة الربح وتخفيض التكاليف .

أنواع التكاليف :

يمكن تقسيم التكاليف إلى الأنواع التالية :

(١) تكلفة الوحدات نفسها التي نطلبها .

(٢) تكلفة إصدار الطلبيات .

(٣) تكلفة التخزين .

(٤) تكلفة نفاد المخزون .

تعاريف عامة :

يمكن إستخدام التعاريف والرموز التالية في دراسة الرقابة على المخزون السلعي باستخدام نموذج المحاكاة :

(١) ط = الطلب السنوي (الإحتياجات السنوية)

(٢) ك = الكمية الإقتصادية للطلب (الكمية التي تُطلب في كل مرة)

(٣) عدد مرات الطلب خلال السنة = م = $\frac{ط}{ك}$

(٤) تكلفة تخزين الوحدة الواحدة سنوياً = ز

(٥) متوسط كمية المخزون = $\frac{ك}{٢}$

ولتحديد الكمية الإقتصادية للطلب يجب أن تتعادل تكلفة التخزين مع تكلفة إصدار الطلبيات .

أي أن :

$\frac{ك}{٢} \times ز = \frac{ط}{ك} \times ت$ ، حيث (ت) تكلفة إصدار الطلبية الواحدة

وبالضرب × (ك)

$$\therefore \frac{ك^{٢}}{٢} \times ز = ط \times ت$$

وبالضرب × $\frac{٢}{ز}$

$$\therefore ك^{٢} = \frac{٢ ط ت}{ز}$$

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{ك^{٢}} = \sqrt{\frac{٢ ط ت}{ز}}$$

مثال (٤)

إذا كانت الإحتياجات السنوية (الطلب السنوي) = ٣٠٠٠ وحدة ، وكانت تكلفة الطلبية الواحدة = ١٠٠٠ جنيه ، وتخزين الوحدة سنوياً تكلفها (٢٤) جنيه ، ماهو عدد وحدات الطلبية الواحدة (الكمية الإقتصادية للطلب) ؟.

الحـــل :

من بيانات المثال نجد أن :

ط = ٣٠٠٠ وحدة

ت = ١٠٠٠ جنيه

ز = ٢٤ جنيه

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{٢ ط ت}{ز}}$$

$$\therefore \text{الكمية الإقتصادية للطلب} = ك = \sqrt{\frac{٢ \times ٣٠٠٠ \times ١٠٠٠}{٢٤}}$$

= ٥٠٠ وحدة .

مثال (٥)

بفرض أن حجم الطلب على سلعة معينة عن (٦٠٠) يوم على النحو التالي :

حجم الطلب	صفر	١	٢	٣	٤	٥
التكرار	٣٠	٦٠	١٢٠	٢٤٠	٩٠	٦٠

والمطلوب محاكاة الطلب عن عشرة (١٠) أيام قادمة مستخدماً الأرقام العشوائية التالية : ٣٧ ، ١٣، ٨٨، ٣٢، ٥١، ١٨، ٧٥، ٦٢، ٠٣، ٢٥

الحـــل :

لمحاكاة الطلب نمر بالخطوات السابق إيضاحها على النحو التالي :

يتم تحويل جدول التوزيع التكرارى إلى جدول توزيع إحتمالي بقسمة كل تكرار ÷ مجموع التكرارات (٦٠٠) ، ثم نوجد الإحتمال المتجمع الصاعد ، ومن ثم يتم تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع .

ومن هنا يمكن تكوين الجدول التالي :

حجم الطلب	عدد الأيام (التكرار) (ك)	الإحتمال (ح)	الإحتمال المجمع	الأرقام العشوائية
صفر	٣٠	٠,٠٥	٠,٠٥	من ٠٠: ٠٤
١	٦٠	٠,١٠	٠,١٥	من ٠٥: ١٤
٢	١٢٠	٠,٢٠	٠,٣٥	من ١٥: ٣٤
٣	٢٤٠	٠,٤٠	٠,٧٥	من ٣٥: ٧٤
٤	٩٠	٠,١٥	٠,٩٠	من ٧٥: ٨٩
٥	٦٠	٠,١٠	١,٠٠	من ٩٠: ٩٩
المجموع	٦٠٠	١,٠٠	----	----

ولمحاكاة الطلب عن عشرة (١٠) أيام قادمة يتم ترجمة الأرقام العشوائية المنتجة في الجدول السابق إلى أرقام لحجم الطلب عن العشرة أيام المقبلة ، ووضع النتائج في جدول على النحو التالي :

الأرقام العشوائية المستخرجة (أو المنتجة)	حجم الطلب
٣٧	٣
١٣	١
٨٨	٤
٣٢	٢
٥١	٣
١٨	٢
٧٥	٤
٦٢	٣
٠٣	صفر
٢٥	٢

وعلى ذلك يكون متوسط الطلب اليومي عن العشرة أيام القادمة من واقع نظام المحاكاة هو :

$$= \frac{٣+١+٤+٢+٣+٢+٤+٣+ \text{صفر} +٢}{١٠}$$

= $\frac{٢٤}{١٠}$ = ٢,٤ وحدة يومياً ،وهي التي يتم مقارنتها بالقيمة المتوقعه ، حيث :

القيمة المتوقعة = (صفر× ٠,٠٥) + (١ × ٠,١) + (٢ × ٠,٢)
+ (٣ × ٠,٤) (٤ × ٠,١٥) + (٥ × ٠,١)

∴ القيمة المتوقعة = صفر + ٠,١ + ٠,٤ + ١,٢ + ٠,٦ +٠,٥
= ٢,٨ وحدة يومياً ،

مثال (٦)

بفرض أنه من واقع الخبرة الماضية تم التوصل إلى النتائج التالية عن (١٠٠) طلبية :

١-

وقت الطلبية (باليوم)	١	٢	٣	٤
عدد الأيام (التكرار)	٤٠	٣٠	٢٠	١٠

٢- تُستخدم الأرقام العشوائية التالية :

١٧ ، ٣٥، ٣٢ ، ٥١ ، ٦٨ ، ٦٢، ٥٥، ٧٤ ، ٤١ ، ٩٨

٣- أن حجم الطلبية الواحدة = (٨) وحدات

٤- وأن نقطة إعادة الطلب = (٤) وحدات

٥- تكلفة الطلبية الواحدة = ٢٠ جنيه

٦- تكلفة التخزين للوحدة = (جنيه واحد) سنوياً.

٧- تكلفة نفاد المخزون (الربح الضائع نتيجة عدم وجود بضاعة) = ٩ جنيه

والمطلوب إيجاد :

(١) متوسط المخزون آخر كل يوم؟.

(٢) متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة ؟.

(٣) متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد؟.

(٤) متوسط تكلفة التخزين يومياً ؟.

(٥) متوسط تكلفة نفاد المخزون ؟.

(٦) تكلفة الطلبية لليوم الواحد؟.

(٧) التكلفة الإجمالية ؟.

الحــل :

يتم تحويل جدول التوزيع التكرارى إلى جدول توزيع إحتمالي ، ثم نوجد الإحتمال المتجمع الصاعد ، ومن ثم يتم تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع كما يلي :

وقت الطلبية باليوم	عدد الأيام (التكرار) (ك)	الإحتمال (ح)	الإحتمال المجمع	الأرقام العشوائية
١	٤٠	٠,٤٠	٠,٤٠	من ٠٠: ٣٩
٢	٣٠	٠,٣٠	٠,٧٠	من ٣٩: ٦٩
٣	٢٠	٠,٢٠	٠,٩٠	من ٦٩: ٨٩
٤	١٠	٠,١٠	١,٠٠	من ٩٠: ٩٩
المجموع	١٠٠	١,٠٠	----	-----

ولتحقيق المطلوب في هذا المثال نكون الجدول التالي :

الأيام	الوحدات الواردة	المخزون أول كل يوم	الطلب من واقع المحاكاة	رصيد آخر كل يوم	المبيعات الضائعة	هل نطلب	الرقم العشوائي	وقت الطلبية
١	صفر	٨	٣	٥	صفر	لا	١٧	
٢	صفر	٥	١	٤	صفر	نعم	٣٥	١
٣	صفر	٤	٤	صفر	صفر	لا	٣٢	
٤	٨	٨	٢	٦	صفر	لا	٥١	
٥	صفر	٦	٣	٣	صفر	نعم	٦٨	٢
٦	صفر	٣	٢	١	صفر	لا	٦٢	
٧	صفر	١	٤	صفر	٣	لا	٥٥	
٨	٨	٨	٣	٥	٨	لا	٧٤	
٩	صفر	٥	صفر	٥	صفر	لا	٤١	
١٠	صفر	٥	٢	٣	صفر	نعم	٩٨	٤
			٢٤	٣٢	٣			

وعلى ذلك يكون :

(١) متوسط المخزون آخر كل يوم = $\frac{٣٢}{١٠}$ = ٣,٢ وحدة .

(٢) متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة = $\frac{٣}{١٠}$ = ٠,٣ وحدة .

(٣) متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد = $\frac{٣}{١٠}$ = ٠,٣ وحدة .

(٤) متوسط تكلفة التخزين يومياً = ٣,٢ × ١ = ٣,٢ جنيه .

(٥) متوسط تكلفة نفاد المخزون

= الربح الضائع × متوسط عدد الوحدات التي لم يُتمكن من بيعها

= ٩ × ٠,٣ = ٢,٧ جنيه.

(٦) متوسط تكلفة الطلبية لليوم الواحد = ٠,٣ × ٢٠ = ٦ جنيهات .

(٧) متوسط التكلفة الإجمالية يومياً للطلبيات والتخزين والربح الضائع =

= ٦ + ٣,٢ + ٢,٧ = ١١,٩ جنيه .

مثال (٧)

شركة تفاضل بين نظامين للمخزون السلعي :

(١) النظام الأول : كمية الطلبية الواحدة = ٥٠ ، والحد الأدنى للطلب = ٣٠

(٢) النظام الثاني : كمية الطلبية الواحدة = ٤٥ ، والحد الأدنى للطلب = ٢٥

فإذا علمت أن :

- تكلفة التخزين للوحدة = (جنيه واحد) يومياً
- تكلفة الطلبية الواحدة = ٢٠ جنيه
- تكلفة نفاد المخزون (الربح الضائع نتيجة عدم وجود بضاعة) = ٥ جنيه
- التوزيعات الإحتمالية للطلب اليومي والوقت اللازم لإنجاز الطلبية على النحو التالي :

حجم الطلب اليومي	الإحتمال	الوقت اللازم للطلبية	الإحتمال
١٠	٠,٢٠	١	٠,١٠
١١	٠,٥٠	٢	٠,٣٠
١٢	٠,٣٠	٣	٠,٦٠

والمطلوب :

إستخدم اسلوب المحاكاة في المفاضلة بين النظامين؟٠

الحــل :

حيث أننا نرغب في المحاكاة للمفاضلة بين النظامين لمدة عشرة أيام ، فإننا نختار بطريقة عشوائية الأرقام من أي عمودين للأرقام العشوائية للأيام العشرة ، أو نستخدم الآلة الحاسبة ، وبفرض أن الأرقام العشوائية هي :

٩٤ ، ١٦، ٧٣ ، ٤٦ ، ٢٠ ، ٩٩، ٣٥، ٠١ ، ١٧ ، ٣٢

ومن هنا يمكن تكوين الجدول التالي :

الأيام	الأرقام العشوائية المنتجة	الطلب من واقع المحاكاة
١	٩٤	١٢
٢	١٦	١٠
٣	٧٣	١٢
٤	٤٦	١١
٥	٢٠	١١
٦	٩٩	١٢
٧	٣٥	١١
٨	٠٣	١٠
٩	١٧	١٠
١٠	٣٢	١١
	مجموع	١١٠

نوجد الإحتمال المتجمع الصاعد ، ومن ثم يتم تخصيص الأرقام العشوائية حسب قيم الإحتمال المجمع كما يلي :

الوقت اللازم للطلبية	الإحتمال (ح)	الإحتمال المجمع	الأرقام العشوائية
١	٠,١٠	٠,١٠	من ٠٠ : ٠٩
٢	٠,٣٠	٠,٤٠	من ٠٩ : ٣٩
٣	٠,٦٠	١,٠٠	من ٤٠ : ٩٩
المجموع	١,٠٠	----	-----

وبالإعتماد على نظام المحاكاة لتقدير حجم الطلب للعشرة أيام فإنه :

بالنسبة للنظام الأول :

حيث أن حجم الطلبية الواحدة = ٥٠ وحدة ، ونقط إعادة الطلب (الحد الأدنى للطلبية) = ٣٠ وحدة ، فإن :

الأيام	الوحدات الواردة	المخزون أول كل يوم	الطلب من واقع المحاكاة	رصيد آخر كل يوم	المبيعات الضائعة	هل نطلب	الرقم العشوائي	وقت الطلبية
١	صفر	٥٠	١٢	٣٨	صفر	لا	٤١	
٢	صفر	٣٨	١٠	٢٨	صفر	نعم	٠٦	١
٣	صفر	٢٨	١٢	١٦	صفر	لا	٥٠	
٤	٥٠	٦٦	١١	٥٥	صفر	لا	١٥	
٥	صفر	٥٥	١١	٤٤	صفر	لا	٣٨	
٦	صفر	٤٤	١٢	٣٢	صفر	لا	٥١	
٧	صفر	٣٢	١١	٢١	صفر	نعم	٢٤	٢
٨	صفر	٢١	١٠	١١	صفر	لا	٦٩	
٩	صفر	١١	١٠	١	صفر	لا	٨٥	
١٠	٥٠	٥١	١١	٤٠	صفر	لا	٥٤	
-----			١١٠	٢٨٦	صفر	-----		

حيث أن الأرقام العشوائية الخاصة بوقت الطلبية حسب الآلة الحاسبة هي :

٤١ ، ٠٦ ، ٥٠ ، ١٥ ، ٣٨ ، ٥١، ٢٤ ، ٦٩ ، ٨٥ ، ٥٤

وعلى ذلك يكون :

(١) متوسط المخزون آخر كل يوم = $\frac{٢٨٦}{١٠}$ = ٢٨,٦ وحدة ٠

(٢) متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة =صفر ٠

(٣) متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد = $\frac{٢}{١٠}$ = ٠,٢ وحدة ٠

(٤) متوسط تكلفة الطلبية لليوم الواحد = ٠,٢ × ٢٠ = ٤ جنيهات ٠

(٥) متوسط تكلفة التخزين يومياً = ٢٨,٦ × ١ = ٢٨,٦ جنيه ٠

(٦) متوسط تكلفة نفاد المخزون = صفر

(٧) متوسط التكلفة الإجمالية = ٤ + ٢٨,٦ + صفر = ٣٢,٦ جنيه ٠

بالنسبة للنظام الثاني :

حيث أن حجم الطلبية الواحدة = ٤٥ وحدة ، ونقط إعادة الطلب (الحد الأدنى للطلبية) = ٢٥ وحدة ، فإن :

الأيام	الوحدات الواردة	المخزون أول كل يوم	الطلب من واقع المحاكاة	رصيد آخر كل يوم	المبيعات الضائعة	هل نطلب	الرقم العشوائي	وقت الطلبية
١	صفر	٤٥	١٢	٣٣	صفر	لا	٧٩	
٢	صفر	٣٣	١٠	٢٣	صفر	نعم	٠٩	١
٣	صفر	٢٣	١٢	١١	صفر	لا	١٤	
٤	٤٥	٥٦	١١	٤٥	صفر	لا	٣٨	
٥	صفر	٤٥	١١	٣٤	صفر	لا	٤٥	
٦	صفر	٣٤	١٢	٢٢	صفر	نعم	٢١	
٧	صفر	٢٢	١١	١١	صفر	لا	٦٦	٢
٨	صفر	١١	١٠	١	صفر	لا	٢٦	
٩	صفر	٤٦	١٠	٣٦	صفر	لا	٨٩	
١٠	٤٥	٣٦	١١	٢٥	صفر	نعم	١٧	٢
-----			١١٠	٢٤١	صفر	-----		

حيث أن الأرقام العشوائية الخاصة بوقت الطلبية حسب الآلة الحاسبة هي :

٧٩ ، ٠٩ ، ١٤ ، ٣٨ ، ٤٥ ، ٢١، ٦٦ ، ٢٦ ، ٨٩ ، ١٧

وعلى ذلك يكون :

١. متوسط المخزون آخر كل يوم = $\frac{٢٤١}{١٠}$ = ٢٤,١ وحدة .

٢. متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة = صفر .

٣. متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد = $\frac{٣}{١٠}$ = ٠,٣ وحدة .

٤. متوسط تكلفة الطلبية لليوم الواحد = ٠,٣ × ٢٠ = ٦ جنيهات .

٥. متوسط تكلفة التخزين يومياً = ٢٤,١ × ١ = ٢٤,١ جنيه .

٦. متوسط تكلفة نفاد المخزون = صفر

٧. متوسط التكلفة الإجمالية = ٦ + ٢٤,١ + صفر = ٣٠,١ جنيه .

ومـــن هنا نلاحظ أن البديل الثاني أفضل من البديل الأول لأن التكلفة الإجمالية للمخزون السلعي أقل ، وبالتالي ، فإن البديل الثاني يحقق وفر مقداره :

٣٢,٦ – ٣٠,١ = ٢,٥ وحدة نقد

تمارين الفصل التاسع

(١) بفرض أن أحد وكلاء إحدى شركات السيارات يريد أن يقدر حجم المبيعات خلال فترة زمنية قادمة ، ولتكن سنة قادمة ، باستخدام نظام المحاكاة ، ولتحقيق هذا الغرض أمكن الحصول على أرقام المبيعات خلال فترة زمنية كافية في الماضي (١٥٠٠ يوم عمل) ، كما أمكن تلخيص هذه المبيعات في الجدول التالي :

عدد السيارات المباعة (س)	عدد الأيام (التكرار) (ك)
صفر	٧٥
١	٣٧٥
٢	٤٥٠
٣	٣٠٠
٤	٢٢٥
٥	٧٥
المجموع	١٥٠٠

والمطلوب :

تقدير المبيعات خلال (١٠) عشرة أيام قادمة ؟.

ملحوظة : يمكنك إستخدام الأرقام العشوائية التالية المستخرجة من جدول الأرقام العشوائية :

٧٨ ، ٢٨ ، ٠٨ ، ٠٢ ، ٢٣ ، ٥٤ ، ٥٧ ، ٠٠ ، ٨٤ ، ٩٥

(٢) فيما يلي متوسط وقت أداء الخدمة بورشة محمد المفتي لإصلاح السيارات والإحتمالات الخاصة بها :

متوسط الزمن بالدقائق	الإحتمال
٧٥	٠,٢٠
١٥٠	٠,٤٠
٣٠٠	٠,٣٠
٦٠٠	٠,١٠

المطلوب إجراء المحاكاة بالنسبة لعشرة حالات لإصلاح السيارات ، بفرض أن الأرقام العشوائية المستخرجة هي :

٧٨ ، ٢٨ ، ٠٨ ، ٠٢ ، ٢٣ ، ٥٤ ، ٥٧ ، ٠٠ ، ٨٤ ، ٩٥

(٣) يرغب شخص في شراء مشروع منشأة تعمل بالمنطقة منذ فترة ، وقبل الشراء يرغب في تقدير الأرباح المتوقعة خلال العشرين (٢٠) شهر القادمة باستخدام نظام المحاكاة إعتماداً على خبرة السنوات السابقة ، وقد أمكن الحصول على البيانات التالية عن المائة شهر الماضية :

التكاليف الشهرية (بالألف)	عدد الشهور	الإيرادات الشهرية (بالألف)	عدد الشهور
٤١	١٥	٤٤	١٠
٤٢	٢٠	٤٥	٢٠
٤٣	٣٥	٤٦	٤٠
٤٤	٢٠	٤٧	٢٠
٤٥	١٠	٤٨	١٠
	١٠٠		١٠٠

بفرض أن الأرقام العشوائية الممكن إستخدامها بالنسبة للإيرادات هي :

٥٧ ، ٩٢ ، ٠٨ ، ٤٦ ، ٧٥ ، ٢٣ ، ٨٨ ، ٦٦ ، ٩٩ ، ٠٧

٠٨ ، ٢٢ ، ٤٥ ، ١٢ ، ٠٥ ، ٠٢ ، ٠٦ ، ٦٥ ، ٩٥ ، ٧٨

وأن الأرقام العشوائية الممكن إستخدامها بالنسبة للتكاليف هي :

٦٨ ، ٧٦ ، ٣١ ، ٤٢ ، ٨٣ ، ١٢ ، ٩٢ ، ٠٥ ، ٣٧ ، ٩٤

٨٢ ، ٦١ ، ٩٨ ، ٤١ ، ٨٨ ، ٣٨ ، ٩٠ ، ٢٩ ، ٥٦ ، ٧٥

والمطلوب إستخدام المحاكاة في مساعدة ذلك الشخص في تقديراته ؟٠

(٤) بفرض أنه كانت التكاليف الخاصة بأحد المنشآت خلال ال (٢٠٠) شهر الماضية كما يلي :

التكاليف (س)	عدد الشهور (التكرار) (ك)
٢٥٠٠٠	٥
٢٦٠٠٠	٢٥
٢٧٠٠٠	٣٠
٢٨٠٠٠	٣٥
٢٩٠٠٠	٤٠
٣٠٠٠٠	٢٥
٣١٠٠٠	١٥
٣٢٠٠٠	١٠
٣٣٠٠٠	١٥
المجموع	٢٠٠

والمطلوب : محاكاة التكاليف خلال (١٠) عشرة شهور القادمة ؟٠

ملحوظة : يمكنك إستخدام الأرقام العشوائية التالية المستخرجة من جدول الأرقام العشوائية :

٧١ ، ٧٣ ، ٦٦ ، ٨٩ ، ٦٣ ، ٥٤ ، ٣٨ ، ٠٩ ، ٠٠ ، ٠٣

(٥) إذا كانت مبيعات توكيل طارق للسيارات خلال (٨٠) أسبوع على النحو التالي :

عدد السيارات المباعة	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد الأسابيع	٤	٢٤	١٦	١٦	١٢	٨

والمطلوب إستخدام الأرقام العشوائية التالية في محاكاة الطلب على سيارات التوكيل عن العشرين (٢٠) أسبوع القادمة :

٢٩ ، ٩٨، ٥٤، ٢٢، ٨٣، ٣٧، ٦٢، ٣٥، ٠٢، ٨٨

٤٩ ، ٥٧، ٣٨، ٧٣، ٣٢، ١٧، ٠٣، ٠٦، ٧٧، ٤٢

ثم أجب عن الأسئلة التالية :

١. إذا كان حجم المعروض من السيارات = ٤ سيارات أسبوعياً بصفة دائمة ، فما هو عدد المرات التي يعجز فيها التوكيل عن تلبية الطلبات ؟

٢. بفرض عدم إستخدام أسلوب للمحاكاة لتقدير حجم الطلب على السيارات ما هو متوسط حجم المبيعات المتوقع عن الأسبوع الواحد ؟٠

(٦) إذا كانت الإحتياجات السنوية (الطلب السنوي) = ٦٠٠٠ وحدة ، وكانت تكلفة الطلبية الواحدة = ٢٠٠٠ جنيه ، وتخزين الوحدة سنوياً تكلفها (٤٨) جنيه ٠ ماهو عدد وحدات الطلبية الواحدة (الكمية الإقتصادية للطلب) ؟٠

(٧) بفرض أن حجم الطلب على سلعة معينة عن (١٠٠٠) يوم على النحو التالي :

حجم الطلب	صفر	١	٢	٣	٤	٥
التكرار	١٣٠	١٦٠	٢٢٠	٢٤٠	٩٠	١٦٠

والمطلوب محاكاة الطلب عن عشرة (١٠) أيام قادمة مستخدماً الأرقام العشوائية التالية : ١٣ ، ٨٨، ٥١، ٣٢، ٢٥، ٠٣، ٦٢، ٧٥، ١٨، ٣٧

(٨) إستخدم الأرقام العشوائية التالية :

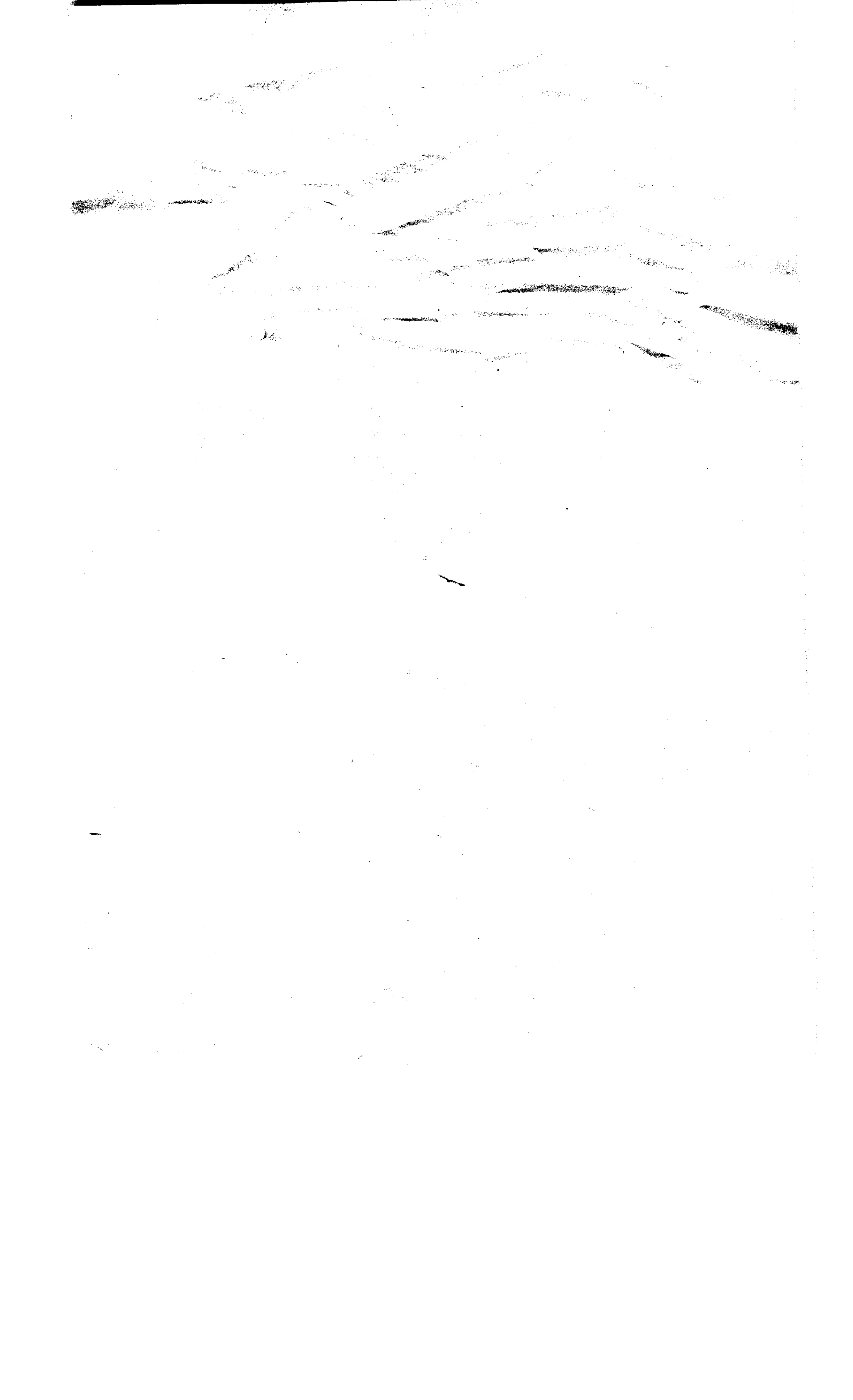
١٧ ، ٣٢، ٣٥ ، ٦٨ ، ٥١ ، ٥٥، ٦٢، ٧٤ ، ٤١ ، ٩٨

وبفــرض أن حجــم الطلبية الواحدة = (١٦) وحدة ، وأن نقطة إعادة الطلب = (٨) وحدات ، وتكلفة الطلبية الواحدة = ٢٠ جنيه ، وتكلفة التخزين للوحدة = (١,٥ جنيه) سنوياً٠

٧- تكلفة نفاد المخزون (الربح الضائع نتيجة عدم وجود بضاعة) = ١٠ جنيه

والمطلوب إيجاد :

١. متوسط المخزون آخر كل يوم؟٠
٢. متوسط عدد وحدات المبيعات الضائعة ؟٠
٣. متوسط عدد الطلبيات لليوم الواحد؟٠
٤. متوسط تكلفة التخزين يومياً ؟٠
٥. متوسط تكلفة نفاد المخزون ؟٠
٦. تكلفة الطلبية لليوم الواحد؟٠
٧. التكلفة الإجمالية ؟٠



الفصل العاشر

تطبيقات تجارية متنوعة

- مقدمة .
- تحليل ماركوف .
- صفوف الإنتظار .
- تحليل التعادل .

(١٠-١) مقدمة

يحتاج المشتغلون بالجوانب التجارية الإلمام بموضوعات أخرى غير التي تم التعرض لها في هذا الكتاب ، فنجد أن متخذ القرار في كثير من المواقف الحياتية يحتاج إلى الوقوف على أرض صلبة عندما يقدم على قرار ما ويكون أمامه الإختيار من عدة بدائل • ويعتبر أسلوب سلاسل ماركوف من الأساليب الإحتماليه التى تخدم وتناسب متخذ القرار الذى يواجه مواقف وبدائل مختلفه ، ويكون عليه الإختيار من بينها بما يعظم دالة منفعته •

ومن ناحية أخرى تنشأ مشكلة صفوف الإنتظار إذا كان معدل وصول العملاء وطالبى الخدمه سريعاً بدرجه تفوق معدل أداء الخدمه من جانب من يعمل بمركز الخدمه ، وكذلك يكون الحال إذا كان معدل أداء الخدمه أسرع من معدل وصول العملاء ، بمعنى وجود وحدات تأدية خدمه عاطله بدون عمل ، ومن هنا تنشأ الحاجة إلى دراسة والإلمام بنظرية صفوف الإنتظار التي هى علاج لمشكلات الإنتظار بشقيها •

ومن ناحية ثالثة ، يحتاج متخذ القرار إلى معرفة إلى أي مدى يمكن تحقيق التعادل بين الإيرادات والمصروفات الخاصة بمشروع ما •

وعلى هذا الأساس تم تجميع الموضوعات الثلاث التالية في هذا الفصل ، وهي :

(١) تحليل ماركوف•

(٢) صفوف الإنتظار•

(٣) تحليل التعادل •

(١٠-٢) تحليل ماركوف :

يهدف أسلوب ماركوف إلى دراسة وتحليل التحركات أو التغيرات الحاليه لمتغير معين كمحاوله للتنبؤ بتحركاته وتغيراته المتوقعه أو المستقبله ويعتمد أسلوب سلاسل ماركوف على أساس أن سلوك أى متغير فى المستقبل يتحدد فى ضوء سلوكه فى الفتره أو فى الفترات السابقه مباشرةً ، أى بمعرفة ودراسة سلوك متغير ما فى الفتره الحاليه فإنه يمكن التنبؤ بسلوك هذا المتغير فى الفتره القادمه .

وإذا كان تطبيق أسلوب ماركوف فى المجالات الإداريه قد إرتبط فى البدايه بمجال رسم السياسات التسويقيه ، فقد ظهرت فى السنوات الأخيره تطبيقات متعدده لأسلوب سلاسل ماركوف فى المجالات المحاسبيه والإداريه منها على سبيل المثال مايلى :

(١) دراسة فعالية برامج الحملات الإعلانيه ، حيث يُستخدم أسلوب سلاسل ماركوف فى تقويم آثار البرامج الإعلانيه والنتائج المتوقعه لكل برنامج .

(٢) التنبؤ بالإحتياجات من القوى العامله فى ضوء معرفة أعداد من يتركون الخدمه بسبب الإستقاله أو الإحاله للمعاش أو بسبب الوفاه .

(٣) دراسة جداول تقادم أرصدة حسابات العملاء فى نهاية عدة فترات زمنيه ومدى تحول العملاء من درجه إئتمانيه معينه إلى درجه أخرى ، ومحاولة تقدير مخصص الديون المشكوك فيها .

(٤) التنبؤ بنصيب وسائل النقل المختلفه فى نقل سلعه معينه لفتره قادمه ، وذلك فى ضوء التعرف على النقلات التى تقوم بها كل وسيله ، والنقلات التى تحول إليها من وسائل النقل الأخرى .

ولتطبيق تحليل ماكوف يجب توافر الشروط التالية :

- ثبات حجم السوق ، أي عدم دخول عملاء جدد أو إنسحاب عملاء قدامى
- ثبات عدد المنتجين
- ثبات سلوك العملاء
- حرية إنتقال العملاء من شركة إلى أخرى

ولبيان كيفية الإستفاده من هذا الأسلوب سنتناول تطبيق أسلوب ماركوف فى أحد المجالات الإداريه وهى مجال التسويق ورسم السياسات التسويقيه ، ولتوضيح تطبيق أسلوب ماركوف نفترض المثال التالى :

مثال (١)

بفرض وجود ثلاث شركات تنتج منتجاً واحداً ، ولكن يتم تسويقه تحت مسميات وعلامات تجاريه مختلفه (س ، ص ، ع) ، ، وبفرض أن عدد العملاء فى السوق (١٠٠٠) عميل ، والجدول التالي يلخص التعاملات ٠

الشركه	عدد العملاء فى أول يناير ٢٠٠١	تحركات العملاء						عدد العملاء فى أول فبراير ٢٠٠١
		المكسب			الخساره			
		من س	من ص	من ع	إلى س	إلى ص	إلى ع	
س	٢٠٠	صفر	٣٥	٢٥	صفر	٢٠	٢٠	٢٢٠
ص	٥٠٠	٢٠	صفر	٢٠	٣٥	صفر	١٥	٤٩٠
ع	٣٠٠	٢٠	١٥	صفر	٢٥	٢٠	صفر	٢٩٠
المجموع	١٠٠٠	٤٠	٥٠	٤٥	٦٠	٤٠	٣٥	١٠٠٠

وعلى ضوء بيانات الجدول السابق ، يمكن حساب إحتمالات إحتفاظ كل شركه بعملائها ، إحتمالات فقدانها لجزء من عملائها للشركات الأخرى ، وذلك

بقسمة عدد العملاء الذين تحتفظ بهم الشركه وعدد العملاء الذين ستخسرهم على العدد الإجمالى لعملائها الأصليين (الذين كانوا لديها فى بداية الفتره) وذلك من خلال الجدول التالى :

الشركة / الإحتمال	س	ص	ع
الإحتفاظ	$\frac{٢٠٠-٤٠}{٢٠٠}$ = ٠,٨	$\frac{٥٠٠-٥٠}{٥٠٠}$ = ٠,٩	$\frac{٣٠٠-٤٥}{٣٠٠}$ = ٠,٨٥
فقد العملاء للشركة (س)	صفر	$\frac{٣٥}{٥٠٠}$ = ٠,٠٧	$\frac{٢٥}{٣٠٠}$ = ٠,٨٣
فقد العملاء للشركة (ص)	$\frac{٢٠}{٢٠٠}$ = ٠,١	صفر	$\frac{٢٠}{٣٠٠}$ = ٠,٠٦٧
فقد العملاء للشركة (ع)	$\frac{٢٠}{٢٠٠}$ = ٠,١	$\frac{١٥}{٥٠٠}$ = ٠,٠٣	صفر
مجموع الإحتمالات	١,٠٠	١,٠٠	١,٠٠

وعلى ذلك ، تكون مصفوفة التحركات الإحتماليه (مصفوفة إحتمالات الإنتقال) على النحو التالى :

خسارة ↓ / مكسب ←	س	ص	ع
س	٠,٨	٠,٠٧	٠,٠٨٣
ص	٠,١	٠,٩	٠,٠٦٧
ع	٠,١	٠,٠٣	٠,٨٥٠

حيث أن الصف يمثل الإحتفاظ والمكسب ، والعمود يمثل الإحتفاظ والخساره ، فالعمود الأول يبين أن الشركه (س) تحتفظ بـ ٨٠٪ من عملائها وأنها تخسر ١٠٪ من عملائها للشركه (ص) وتخسر أيضاً ١٠٪ للشركه (ع) ، والصف الأول يبين أن الشركه (س) ستحتفظ بـ ٨٠٪ من عملائها ، وتكسب ٧٪ من عملاء الشركه (ص) ، وتكسب أيضاً ٨,٣٪ من عملاء الشركه (ع) ، وهكذا .

وبنظره فاحصه لمصفوفة التحركات الإحتماليه يمكن ملاحظة الآتى :

- أنها مصفوفه مربعه (عدد الاصفوف = عدد الأعمده)
- جميع عناصرها موجبه .
- قطرها يمثل إحتمالات الإحتفاظ بالعملاء.
- مجموع عناصر كل عمود تساوى الواحد الصحيح ، حيث أن كل عمود يمثل إحتمالات تحركات عملاء كل شركه .

التنبؤ بحصص السوق المتوقعه لفترات قادمه : -

على ضوء مصفوفة التحركات الإحتماليه ، وبمعرفة الحصص الحاليه للشركات يمكن التنبؤ بالحصص المتوقعه لكل شركه فى الفتره القادمه (أي شهر) وفقاً للعلاقه التاليه :

حصص السوق فى الفتره القادمه = مصفوفة التحركات الإحتماليه خلال الفتره الحاليه × حصص الشركات فى الفتره الحاليه

وبفرض أن التحركات الإحتماليه فى هذا المثال ستظل ثابته ، وأن حصص الشركات فى أول فبراير وفقاً للبيانات السابقه كانت كما يلى : -

حصة (س) = $\frac{٢٢٠}{١٠٠٠}$ = ٢٢ ٪

حصة (ص) = $\frac{٤٩٠}{١٠٠٠}$ = ٤٩ ٪

حصة (ع) = $\frac{٢٩٠}{١٠٠٠}$ = ٢٩ ٪

∴ حصص الشركات فى السوق خلال الشهر القادم (الفتره القادمه) ، أي فى أول مارس ٢٠٠١ على النحو التالى :

∴ الحصص المتوقعة = $\begin{pmatrix} ٠,٨ & ٠,٠٧ & ٠,٠٨٣ \\ ٠,١ & ٠,٩ & ٠,٦٧ \\ ٠,١ & ٠,٠٣ & ٠,٨٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٢٢ \\ ٠,٤٩ \\ ٠,٢٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٢٣٤ \\ ٠,٤٨٢ \\ ٠,٢٨٤ \end{pmatrix}$

حيث أنه من خلال ضرب المصفوفات السابق دراستها نجد أن :

نصيب س = (٠,٨×٠,٢٢)+(٠,٠٧×٠,٤٩)+(٠,٠٨٣×٠,٢٩) = ٠,٢٣٤

نصيب ص = (٠,١×٠,٢٢)+(٠,٩٠×٠,٤٩)+(٠,٠٦٧×٠,٢٩)= ٠,٤٨٢

نصيب ع = (٠,١×٠,٢٢)+(٠,٠٣×٠,٤٩)+(٠,٨٥٠×٠,٢٩) = ٠,٢٨٤

ومن ناحية أخرى :

حصص الشركات فى السوق فى أول أبريل ٢٠٠١ =

مصفوفة التحركات الإحتماليه	×	حصص الشركات فى أول مارس سنة ٢٠٠١

= $\begin{pmatrix} ٠,٨ & ٠,٠٧ & ٠,٠٨٣ \\ ٠,١ & ٠,٩ & ٠,٦٧ \\ ٠,١ & ٠,٠٣ & ٠,٨٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٢٣٤ \\ ٠,٤٨٢ \\ ٠,٢٨٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٢٤٥ \\ ٠,٤٧٦ \\ ٠,٢٧٩ \end{pmatrix}$

وكذلك : لحساب الحصص المتوقعه للشركات فى أول مايو ٢٠٠١ ، فإننا نضرب :

مصفوفة التحركات الإحتماليه × حصص الشركات فى أول أبريل سنة ٢٠٠١

∴ حصص الشركات فى السوق فى أول مايو ٢٠٠١ =

$$\begin{pmatrix} ٠,٢٤٥ \\ ٠,٤٧٦ \\ ٠,٢٧٩ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٠٨٣ & ٠,٠٧ & ٠,٨ \\ ٠,٦٧ & ٠,٩ & ٠,١ \\ ٠,٨٥ & ٠,٠٣ & ٠,١ \end{pmatrix} =$$

وهكذا

مثال (٢)

في ١٩٩٩/١/١م كانت سوق إحدى السلع محتكرة بثلاث شركات (أ ، ب ، جـ) وكان عدد العملاء على الترتيب ٦٠٠٠ ، ٣٠٠٠ ، ١٠٠٠ ، وأثناء السنة كانت تحركات العملاء على النحو التالي :

- ١٢٠٠ من (أ) إلى (ب)
- ٦٠٠ من (أ) إلى (جـ)
- ٢٤٠٠ ظلو يتعاملون مع (ب)
- ٣٠٠ من (ب) إلى (أ)
- ٢٠٠ من (جـ) إلى (أ)
- ٤٠٠ من (جـ) إلى (ب)

والمطلوب تحديد نصيب كل شركة من الشركات الثلاث في ٢٠٠٠/١/١م ، ثم في ٢٠٠١/١/١م ؟٠

الحـــل :

يمكن توضيح تحركات العملاء بين الشركات على النحو التالي :

الشركه	عدد العملاء فى أول يناير ١٩٩٩	تحركات العملاء						عدد العملاء فى أول يناير ٢٠٠٠
		المكســـب			الخســـــاره			
		من أ	من ب	من جـ	إلى أ	إلى ب	إلى جـ	
أ	٦٠٠٠	صفر	٣٠٠	٢٠٠	صفر	١٢٠٠	٦٠٠	٤٧٠٠
ب	٣٠٠٠	١٢٠٠	صفر	٤٠٠	٣٠٠	صفر	٣٠٠	٤٠٠٠
جـ	١٠٠٠	٦٠٠	٣٠٠	صفر	٢٠٠	٤٠٠	صفر	١٣٠٠
المجموع	١٠٠٠٠							١٠٠٠٠

ومن هذا الجدول يمكن إيجاد حصص الشركات من العملاء في ٢٠٠٠/١/١، حيث :

حصة (أ) $= \frac{٤٧٠٠}{١٠٠٠٠} =$ ٤٧ ٪

حصة (ب) $= \frac{٤٠٠٠}{١٠٠٠٠} =$ ٤٠ ٪

حصة (جـ) $= \frac{١٣٠٠}{١٠٠٠٠} =$ ١٣ ٪

أو نوجد مصفوفة التحركات الإحتمالية وضربها في أنصبة الشركات في الفترة الحالية للوصول للحصص السابقة على النحو التالي :

<u>**إحتمالات الإحتفاظ والخسارة للعملاء :**</u>

يمكن حساب إحتمالات الإحتفاظ والفقدان من خلال جدول يُعد لهذا الغرض ، وذلك على النحو التالي :

الشركة / الإحتمال	أ	ب	جـ
الإحتفاظ	$\frac{٦٠٠٠-١٨٠٠}{٦٠٠٠}$ = ٠,٧	$\frac{٢٤٠٠}{٣٠٠٠}$ = ٠,٨	$\frac{١٠٠٠-٦٠٠}{١٠٠٠}$ = ٠,٤
فقد العملاء للشركة (أ)	صفر	$\frac{٣٠٠}{٣٠٠٠}$ = ٠,١	$\frac{٢٠٠}{١٠٠٠}$ = ٠,٢
فقد العملاء للشركة (ب)	$\frac{١٢٠٠}{٦٠٠٠}$ = ٠,٢	صفر	$\frac{٤٠٠}{١٠٠٠}$ = ٠,٤
فقد العملاء للشركة (جـ)	$\frac{٦٠٠}{٦٠٠٠}$ = ٠,١	$\frac{٣٠٠}{٣٠٠٠}$ = ٠,١	صفر
مجموع الإحتمالات	١,٠٠	١,٠٠	١,٠٠

وعلـــى ذلك تكون مصفوفة التحركات الإحتماليه (مصفوفة إحتمالات الإنتقال)

على النحو التالى :

خسارة ↓ / مكسب ←	أ	ب	جـ
أ	٠,٧	٠,١	٠,٢
ب	٠,٢	٠,٨	٠,٤
جـ	٠,١	٠,١	٠,٤

وبفرض أن التحركات الإحتماليه فى هذا المثال ستظل ثابته ، وأن حصص الشركات فى ١٩٩٩/١/١ وفقاً للبيانات السابقه كما يلى : -

حصة (أ) $= \frac{٦٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ٦٠ \%$

حصة (ب) $= \frac{٣٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ٣٠ \%$

حصة (جـ) $= \frac{١٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ١٠ \%$

∴ حصص الشركات فى السوق فى ٢٠٠٠/١/١ =

= مصفوفة التحركات الإحتماليه × حصص الشركات فى أول يناير سنة ١٩٩٩

$$\begin{pmatrix} ٠,٤٧ \\ ٠,٤٠ \\ ٠,١٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٦٠ \\ ٠,٣٠ \\ ٠,١٠ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٢ & ٠,١ & ٠,٧ \\ ٠,٤ & ٠,٨ & ٠,٢ \\ ٠,٤ & ٠,١ & ٠,١ \end{pmatrix} =$$

ويكون :

الحصص المتوقعه للشركات فى ١/١/ ٢٠٠١ =

= مصفوفة التحركات الإحتماليه × حصص الشركات فى أول يناير سنة ٢٠٠٠

$$\begin{pmatrix} ٠,٣٩٥ \\ ٠,٤٦٦ \\ ٠,١٣٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٤٧ \\ ٠,٤٠ \\ ٠,١٣ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٢ & ٠,١ & ٠,٧ \\ ٠,٤ & ٠,٨ & ٠,٢ \\ ٠,٤ & ٠,١ & ٠,١ \end{pmatrix} =$$

مثال (٣)

إذا كانت مصفوفة الإنتقالات الخاصة بثلاث شركات تحتكر سلعة معينة في ١/١/٢٠٠٠م كما يلي :

خسارة ↓ \ مكسب ←	أ	ب	جـ
أ	٠,٧	٠,٢	٠,٢
ب	صفر	٠,٦	٠,١
جـ	٠,٣	٠,٢	٠,٧

وكانت مصفوفة الإحتمالات خلال شهر يناير كما يلي :

أ	ب	جـ
٠,٢٥	٠,٢٥	٠,٥٠

والمطلوب تحديد نصيب كل شركة في ١/٣/٢٠٠٠م ، وذلك بفرض أن عدد العملاء الكلي كان في ١/١/٢٠٠٠ هو ٨٠٠٠ عميل ؟٠

الحل :

أولاً : حصص الشركات فى السوق فى ١/٢/٢٠٠٠ =

= مصفوفة التحركات الإحتماليه × حصص الشركات فى أول يناير سنة ٢٠٠٠

$$= \begin{pmatrix} ٠,٧ & ٠,٢ & ٠,٢ \\ \text{صفر} & ٠,٦ & ٠,١ \\ ٠,٣ & ٠,٢ & ٠,٧ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٢٥ \\ ٠,٢٥ \\ ٠,٥٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٣٢٥ \\ ٠,٢٠ \\ ٠,٤٧٥ \end{pmatrix}$$

ثانياً : الحصص المتوقعه للشركات فى ١/٣/ ٢٠٠٠ =

= مصفوفة التحركات الإحتماليه × حصص الشركات فى أول فبراير سنة ٢٠٠٠

$$= \begin{pmatrix} ٠,٧ & ٠,٢ & ٠,٢ \\ صفر & ٠,٦ & ٠,١ \\ ٠,٣ & ٠,٢ & ٠,٧ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٣٢٥ \\ ٠,٢٠ \\ ٠,٤٧٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٣٦٢٥ \\ ٠,١٦٧٥ \\ ٠,٤٧ \end{pmatrix}$$

وحيث أن عدد العملاء الكلي = ٨٠٠٠ ، فيتم توزيعهم وفقاً للحصص السابقة وعلى ذلك يكون :

نصيب الشركة (أ) من العملاء = ٨٠٠٠ × ٠,٣٦٢٥ = ٢٩٠٠ عميل

نصيب الشركة (ب) من العملاء = ٨٠٠٠ × ٠,١٦٧٥ = ١٣٤٠ عميل

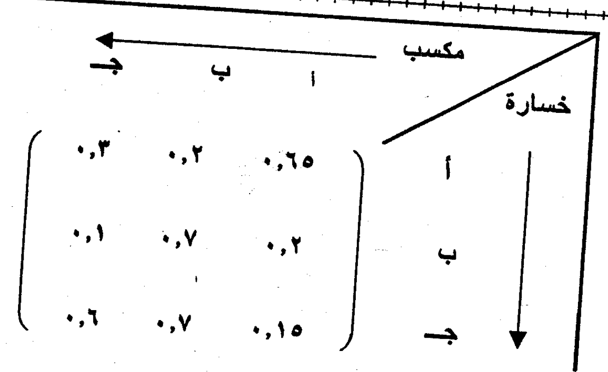
نصيب الشركة (جـ) من العملاء = ٨٠٠٠ × ٠,٤٧ = ٣٧٦٠ عميل

أي أن :

أ	ب	جـ
٢٩٠٠	١٣٤٠	٣٧٦٠

مثال (٤)

إذا كان السوق بالنسبة لسلعة معينة موزعاً عام ٢٠٠٠ بين ثلاث تجار (أ ، ب ، جـ) بنسبة ٤٠٪ ، ٣٥٪ ، ٢٥٪ على التوالي ، وكانت مصفوفة إحتمالات الإنتقال بين عامىْ ٢٠٠٠ ، ٢٠٠١ كما يلي :



أوجد توزيع السوق في عام ٢٠٠١م ؟٠

الحل :

حصص التجار فى السوق فى عام ٢٠٠١ =

= مصفوفة التحركات الإحتماليه × حصص الشركاء فى عام ٢٠٠٠

$$= \begin{pmatrix} ٠,٣ & ٠,٢ & ٠,٦٥ \\ ٠,١ & ٠,٧ & ٠,٢ \\ ٠,٦ & ٠,١ & ٠,١٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٤ \\ ٠,٣٥ \\ ٠,٢٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٤٠٥ \\ ٠,٣٥ \\ ٠,٢٤٥ \end{pmatrix}$$

نصيب التاجر (أ) = ٤٠,٥٪ من السوق ٠

نصيب التاجر (ب) = ٣٥ ٪ من السوق ٠

نصيب التاجر (جـ) = ٢٤,٥٪ من السوق ٠

مثال (٥)

إذا فرضنا وجود مدينة صغيره بها ١٠٠٠٠ متعامل ، وثلاث صيدليات (أ ، ب ، جـ) ، يتعامل معها ٥٠٠٠ ، ٣٠٠٠ ، ٢٠٠٠ شخص على الترتيب ، وكانت مصفوفة إحتمالات الإنتقال في العام الحالي كما يلي :

خسارة \ مكسب	أ	ب	جـ
أ	٠,٧	٠,٢	٠,٣
ب	٠,٢	٠,٦	٠,٢
جـ	٠,١	٠,٢	٠,٥

أوجد نصيب كل صيدلية في العام المقبل ؟.

الحل :

نوجد أولاً حصص الصيدليات الحالية ، فنجد أن :

حصة (أ) = $\frac{٥٠٠٠}{١٠٠٠٠}$ = ٥٠ ٪   حصة (ب) = $\frac{٣٠٠٠}{١٠٠٠٠}$ = ٣٠ ٪

حصة (جـ) = $\frac{٢٠٠٠}{١٠٠٠٠}$ = ٢٠ ٪

∴ حصص الصيدليات الثلاث في العام المقبل =

$$= \begin{pmatrix} ٠,٧ & ٠,٢ & ٠,٣ \\ ٠,٢ & ٠,٦ & ٠,٢ \\ ٠,١ & ٠,٢ & ٠,٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٥ \\ ٠,٣ \\ ٠,٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٤٧ \\ ٠,٣٢ \\ ٠,٢١ \end{pmatrix}$$

أي أنـــه سيصبح نصيب الصيدلية (أ) ٤٧٪ ، نصيب الصيدلية (ب) ٣٢٪ ، نصيب الصيدلية (جـــ) ٢١٪ من العملاء في العام المقبل .

مثال (٦)

في آخر ديسمبر من عام ١٩٩٦م كان نصيب الشركة (أ) من السوق ٢٠٪ ، وكان نصيب كل من الشركات المنافسة (ب ، جـ) ٣٠٪ ، ٥٠٪ على الترتيب وخلال عام ١٩٩٦ إحتفظت الشركة (أ) بـــ ٦٠٪ من عملائها ، وخسرت إلى

الشركة (ب) ٢٠٪ ، وخسرت إلى الشركة (جـ) ٢٠٪ . أما الشركة (ب) فقد إحتفظت بـ ٥٠٪ من عملائها ، وخسرت إلى الشركة (أ) ١٠٪ ، وخسرت إلى الشركة (جـ) ٤٠٪. أما الشركة (جـ) فقد إحتفظت بـ ٧٠٪ من عملائها ، وخسرت إلى الشركة (أ) ٢٠٪ ، وخسرت إلى الشركة (ب) ١٠٪. والمطلوب حساب حصص الشركات الثلاث في السوق في عام ١٩٩٧ ؟

الحل :

حصص الشركات الحالية في السوق هي :

أ	ب	جـ
٠,٢٠	٠,٣٠	٠,٥٠

ووفقا لإحتمالات المكسب والخسارة بين الشركات ، تكون مصفوفة إحتمالات الإنتقال في العام الحالي كما يلي :

خسارة ↓ \ مكسب ←	أ	ب	جـ
أ	٠,٦	٠,١	٠,٢
ب	٠,٢	٠,٥	٠,١
جـ	٠,٢	٠,٤	٠,٧

∴ حصص الشركات الثلاث في عام ١٩٩٧م =

$$\begin{pmatrix}٠,٢٥\\ ٠,٢٤\\ ٠,٥١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٠,٢\\ ٠,٣\\ ٠,٥\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}٠,٢ & ٠,١ & ٠,٦\\ ٠,١ & ٠,٥ & ٠,٢\\ ٠,٧ & ٠,٤ & ٠,٢\end{pmatrix} =$$

أي أنـه سيصـبح نصـيب الشركة (أ) ٢٥٪ ، نصيب الشركة (ب) ٢٤٪ ، نصيب الشركة (جـ) ٥١٪ من السوق في العام ١٩٩٧م.

مثال (٧)

في أول يناير من عام ١٩٩٦م كان نصيب مصانع السيارات (بيجو ، تويوتا ، فيات) من السوق هو (٢٥٪ ، ٤٠٪ ، ٣٥٪) على الترتيب وعلى مدار السنة السابقة إحتفظ مصنع (بيجو) بـ ٨٠٪ من عملائه ، وكسب ٥٪ من مصنع (تويوتا) ، وكسب ٣٪ من مصنع (فيات)٠أما مصنع (تويوتا) فقد إحتفظ بـ ٩٠٪ من عملائه ، وكسب ١٢٪ من مصنع (بيجو) ، وكسب ٢٪ من مصنع (فيات) ٠ أما مصنع (فيات) فقد إحتفظ بـ ٩٥٪ من عملائه ، وكسب ٨٪ من مصنع (بيجو) ، وكسب ٥٪ من مصنع (فيات) ٠ فإذا إستمر هذا السلوك الخاص بالعملاء خلال عام ١٩٩٦ ، فما هي النسب المئوية لنصيب كل مصنع في السوق في أول يناير من عام ١٩٩٧م ؟٠

الحل :

حصص الشركات الحالية في السوق هي :

بيجو	تويوتا	فيات
[٠,٢٥	٠,٤٠	٠,٣٥]

وفقا لإحتمالات المكسب والخسارة بين الشركات ، تكون مصفوفة إحتمالات الإنتقال في العام الحالي كما يلي :

خسارة ↓ \ مكسب ←	بيجو	تويوتا	فيات
بيجو	٠,٨	٠,٠٥	٠,٠٣
تويوتا	٠,١٢	٠,٩	٠,٠٢
فيات	٠,٠٨	٠,٠٥	٠,٩٥

∴ حصص الشركات الثلاث في أول يناير عام ١٩٩٧م =

$$= \begin{pmatrix} ٠,٨ & ٠,٠٥ & ٠,٠٣ \\ ٠,١٢ & ٠,٩ & ٠,٠٢ \\ ٠,٠٨ & ٠,٠٥ & ٠,٩٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٢٥ \\ ٠,٤٠ \\ ٠,٣٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٢٣٠٥ \\ ٠,٣٩٧٠ \\ ٠,٣٧٢٥ \end{pmatrix}$$

أي أنه سيصبح نصيب المصنع (بيجو) ٢٣,٠٥ ٪ ، نصيب المصنع (تويوتا) ٣٩,٧ ٪ ، نصـــيب المصنع (فيات) ٣٧,٢٥ ٪ من السوق في أول يناير من عام ١٩٩٧م.

مثال (٨)

مدينة صغيره بها ٢٠٠٠٠ مستهلك ، وثلاث محلات (أ ، ب ، جـ) يتعامل معها ٨٠٠٠ ، ٧٠٠٠ ، ٥٠٠٠ مستهلك على الترتيب ، وكانت مصفوفة إحتمالات الإنتقال في الفترة الحالية كما يلي :

خسارة ↓ \ مكسب ←	أ	ب	جـ
أ	٠,٨	٠,٢	٠,٣
ب	٠,١٥	٠,٧	٠,١
جـ	٠,٠٥	٠,١	٠,٦

أوجد إحتمالات توزيع السوق في تلك المينة في الفترة المقبلة ؟.

الحل :

نوجد أولاً حصص المحلات الحالية ، فنجد أن :

حصة (أ) = $\frac{٨٠٠٠}{٢٠٠٠٠}$ = ٤٠ ٪

حصة (ب) = $\frac{٧٠٠٠}{٢٠٠٠٠}$ = ٣٥ ٪

حصة (جـ) = $\frac{٥٠٠٠}{٢٠٠٠٠}$ = ٢٥ ٪

∴ حصص المحلات الثلاث في العام المقبل =

$$= \begin{pmatrix} ٠,٨ & ٠,٢ & ٠,٣ \\ ٠,١٥ & ٠,٧ & ٠,١ \\ ٠,٠٥ & ٠,١ & ٠,٦ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٠,٤ \\ ٠,٣٥ \\ ٠,٢٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٤٦٥ \\ ٠,٣٣ \\ ٠,٢٠٥ \end{pmatrix}$$

أي أنه سيصبح :

نصيب المحل (أ) = ٤٦,٥ ٪

نصيب المحل (ب) = ٣٣ ٪

نصيب المحل (جـ) = ٢٠,٥ ٪ من العملاء في الفترة المقبلة .

(١٠-٣) صفوف الإنتظار :

تُستخدم نظرية صفوف الإنتظار على نطاق واسع فى جميع المنشآت الإنتاجيه والخدميه كوسيله رياضيه لخدمة الإداره ، فنجد مثلاً فى شركه صناعيه أن الطلب على قطع الغيار والمواد الخام من جانب عمال المصنع قد يزيد فى أحوال كثيره عن طاقة موظفى المخزن ، وهنا يضطر العمال للوقوف وقتاً طويلاً أمام المخزن حتى يتسنى لهم صرف ما يحتاجونه ٠

وعلى ذلك يتضح أن هناك شرطين أساسيين لتطبيق نظرية صفوف الإنتظار ، وهما :

(١) وجود وحدات من طالبى الخدمه مثل العملاء ، الطائرات ، السفن ، الآلات ، السيارات ، المرضى ، ٠٠٠٠٠إلخ٠

(٢) وجود وحدات لتأدية الخدمه مثل : البنوك ، الموانئ ، المطارات ، وحدات الصيانه ، محطات البنزين ، المستشفيات ، ٠٠٠٠٠إلخ ٠

وذلك مع وجود زياده فى معدل وصول وحدات طالبى الخدمه تفوق طاقة الوحدات مقدمة الخدمه أو العكس ٠

ولدراسة نظرية صفوف الإنتظار وتطبيقها ، يتعين معرفة :

(١) وقت حضور طالبى الخدمه فى المتوسط ٠

(٢) متوسط وقت أداء الخدمه ٠

(٣) عدد مراكز الخدمه الموجوده ٠

وفي هذه الدراسة سوف ينصب التركيز على الإلمام بقواعد صفوف الإنتظار ذات القناة الواحدة فقط ٠

نموذج صف الإنتظار ذات القناه الواحده :

يشير مُصطلح "قناه" إلى عدد مواقع الدخول إلى نظام الخدمه ، وتعنى القناه الواحده ، أنه يوجد موقع واحد للدخول ٠ ويقوم هذا النموذج على الخصائص الآتيه :

١- أن الوحدات التى تصل أولاً تُخدم أولاً ٠

٢- كل طالب خدمه ينتظر حتى يتم خدمته بصرف النظر عن طول الصف ٠

٣- أن متوسط معدل الخدمه أكبر من متوسط معدل الوصول ٠

٤- يُعتبر نظام الصف نظام ثابت ٠

النموذج الرياضي لصف الإنتظار على أساس قناة واحدة :

وعندما تتوافر الخصائص الخاصة بصف الإنتظار ذات القناة الواحدة ، فإنه يمكن تكوين مجموعه من المعادلات التى تحدد الخصائص التشغيليه لصف الإنتظار والمستخدمه بصوره شائعه ، ويُستخدم فى هذه المعادلات الرموز التاليه :

λ : معدل الوصول ، أي متوسط عدد العملاء خلال فتره زمنيه واحدة (ساعة ، دقية ، يوم ، ٠٠٠٠ إلخ) ، يتبع التوزيع البواسوني ٠

μ : معدل أداء الخدمه ، أي متوسط عدد الوحدات التى يتم خدمتها خلال فتره زمنيه معينه (ساعة ، دقية ، يوم ، ٠٠ إلخ) ، يتبع التوزيع الأسي ٠

وتُستخدم المعادلات التاليه فى نموذج صف الإنتظار ذات القناه الواحده :

(١) ع : متوسط عدد العملاء فى النظام (عدد طالبى الخدمه فى الصف ، بالإضافه إلى العدد الذى يتلقى الخدمه) ، حيث :

$$ع = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$$

(٢)ع ف : متوسط عدد العملاء فى الصف •

$$ع_ف = \frac{\lambda^{٢}}{(\lambda - \mu)\mu}$$

$$= ع \times \frac{\lambda}{\mu}$$

(٣) و : متوسط الفترة الزمنية التي يقضيها العميل فى النظام (الوقت المنقضى فى الصف + الوقت المنقضى فى تقديم الخدمه) ، حيث :

$$و = \frac{١}{\lambda - \mu}$$

(٤) وف : متوسط الفترة الزمنية التي يقضيها العميل فى الصف ، حيث :

$$و_ف = و \times \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{\lambda}{(\lambda - \mu)\mu}$$

(٥) ح : إحتمال أن يكون مراكز الخدمه في حالة تشغيل ، أي إحتمال إنتظار عميل واحد بصف الإنتظار ، حيث :

$$ح = \frac{\lambda}{\mu}$$

(٦) $\bar{ح}$: إحتمال أن تكون مراكز الخدمة عاطلة ، حيث :

$$\bar{ح} = ١ - ح = \left(١ - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

(٧) ح (ن > م) : إحتمال أن يزيد عدد العملاء فى الصف عن رقم معين ، وليكن (م) ، حيث :

$$ح (ن > م) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{م+١}$$

مثال توضيحي :

بفرض أن صاحب ورشه لتصليح السيارات لديه عامل ميكانيكى واحد يقوم بتركيب ملفات السيارات ، ويستطيع هذا العامل تركيب ملفات جديده بمعدل متوسط قدره ثلاثة ملفات فى اليوم ، (أى حوالى ٢٠ دقيقه لكل سياره) ، ويصل العملاء الذين يحتاجون هذه الخدمه إلى الورشه بمتوسط سيارتين فى اليوم ، ومن ثم ، فإن : λ = ٢ ، μ = ٣

وعلى ذلك ، يكون :

(١) $ع = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{٢}{٣ - ٢} = ٢$ سياره

أي أنه يوجد فى المتوسط ٢ عميل فى النظام .

(٢) $ع_{ف} = \frac{\lambda^{٢}}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{٢^{٢}}{٣(٣ - ٢)} = ١,٣٣$ سياره

بمعنى أنه يوجد ١,٣٣ سياره تنتظر فى الصف للحصول على الخدمه .

(٣) $و = \frac{١}{\mu - \lambda} = \frac{١}{٣-٢} = ١$ ساعه

أي أن كل عميل يقضى ، فى المتوسط ساعه فى النظام ٠

(٤) $وف = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{٢}{٣(٣-٢)} = \frac{٢}{٣}$ ساعه = ٤٠دقيقه

بمعنى أن كل سياره سوف تقضى فى المتوسط ٤٠ دقيقه فى صف الإنتظار ٠

(٥) $ح = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{٢}{٣} = ٠,٦٧$

بمعنى إحتمال أن يكون العامل مشغول بالمركز= ٠,٦٧

(٦) $\bar{ح} = ١ - ح = \left(١ - \frac{\lambda}{\mu}\right) = ١ - ٠,٦٧ = ٠,٣٣$

بمعنى أن إحتمال عدم وجود أي سياره فى النظام = ٠,٣٣

(٧) ح (ن > م) ، حيث (م = صفر أو ٢ أو ٠٠٠) ، فيكون

$ح\,(ن > صفر) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{٠+١} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٠+١} = ٠,٦٦٧$

$ح\,(ن > ١) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{١+١} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{١+١} = ٠,٤٤٤$

$ح\,(ن > ٢) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{٢+١} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢+١} = ٠,٢٩٦$

وهكذا ، ٠٠٠٠٠٠

مثال (٢)

إذا كان متوسط عدد المترددين الذين يصلون إلى عيادة أحد أطباء الأسنان المشهورين (٣) فى الساعه ، ويستطيع ذلك الطبيب خدمة (٥) منهم فى الساعه فى المتوسط ٠ فالمطلوب :

(١) متوسط عدد المرضى فى النظام ؟

(٢) متوسط عدد المرضى فى الصف ؟

(٣) متوسط الوقت الذي يقضيه المريض فى النظام ؟.

(٤) متوسط الوقت الذي يقضيه المريض فى الصف ؟.

(٥) إحتمال أن تكون العيادة في حالة تشغيل ؟.

(٦) إحتمال أن تكون العيادة عاطلة ؟.

(٧) إحتمال أن يزيد عدد المرضى فى العيادة عن (٣) ؟.

الحـــل :

$\lambda = ٣$ ، $\mu = ٥$

(١) متوسط عدد المرضى فى النظام :

$$ع = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{٣}{٥ - ٣} = ١,٥ \text{ مريض}$$

أي أنه يوجد فى المتوسط ١,٥ عميل فى النظام .

(٢) متوسط عدد المرضى فى الصف ؟

$$ع_ف = \frac{\lambda^٢}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{٣^٢}{٥(٥ - ٣)} = ٠,٩ \text{ مريض}$$

بمعنى أنه يوجد ٠,٩ مريض ينتظر فى الصف للحصول على الخدمه .

(٣) متوسط الوقت الذي يقضيه المريض فى النظام :

$$و = \frac{١}{\mu - \lambda} = \frac{١}{٥ - ٣} = ٠,٥ \text{ ساعه}$$

أي أن كل مريض يقضى ، فى المتوسط ساعه فى النظام .

(٤) متوسط الوقت الذي يقضيه المريض فى الصف :

$$= \text{وف} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{٣}{٥(٥-٣)} = ٠,٣ \text{ ساعه} = ١٨ \text{ دقيقه}$$

بمعنى أن كل مريض سوف يقضى فى المتوسط ١٨ دقيقه فى صف الإنتظار ٠

(٥) إحتمال أن تكون العيادة في حالة تشغيل :

$$= \text{ح} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{٣}{٥} = ٠,٦$$

بمعنى إحتمال أن يكون الطبيب مشغول في العيادة بالمرضى= ٠,٦

(٦) إحتمال أن تكون العيادة عاطلة :

$$= \bar{\text{ح}} = ١ - \text{ح} = \left(١ - \frac{\lambda}{\mu}\right) = ١ - ٠,٦ = ٠,٣$$

بمعنى أن إحتمال عدم وجود أي مريض فى العيادة = ٠,٣

(٧) إحتمال أن يزيد عدد المرضى فى العيادة عن (٣) :

$$\text{ح} (\text{ن} > ٣) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{٢+١} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٣+١} = ٠,١٢٩٦$$

مثال (٣)

محطة بنزين بها مضخة واحدة ، تصل السيارات إلى المحطة وفق توزيع بواسون بمعدل (١٠) سيارات كل ساعة ، وقد تبين أن وقت خدمة السيارات يتبع التوزيع الأسي بمتوسط ٣,٧٥ دقيقة لكل سيارة واحدة ، والمطلوب :

(١) متوسط عدد السيارات فى المحطة ؟

(٢) متوسط عدد السيارات فى الصف ؟

(٣) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى النظام ؟٠

(٤) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى الصف ؟.

(٥) إحتمال أن تكون المحطة في حالة تشغيل ؟.

(٦) إحتمال أن تكون المحطة عاطلة ؟.

(٧) إحتمال أن يزيد عدد السيارات فى المحطة عن (٤) ؟.

الحــل :

$$\lambda = ١٠ \quad ، \quad \mu = \frac{٦٠}{٣,٧٥} = ١٦$$

(١) متوسط عدد السيارات فى النظام :

$$= ع = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{١٠}{١٦-١٠} = ١,٦٦ \text{ سيارة}$$

(٢) متوسط عدد السيارات فى الصف ؟

$$= ع_ف = \frac{\lambda^٢}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{١٠^٢}{١٦(١٦-١٠)} = ١,٠٤ \text{ سيارة}$$

(٣) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى النظام :

$$= و = \frac{١}{\mu - \lambda} = \frac{١}{١٦-١٠} = \frac{١}{٦} \text{ ساعه} = ١٠ \text{ دقائق}$$

(٤) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى الصف :

$$= و_ف = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{١٠}{١٦(١٦-١٠)}$$

$$= ٠,١٠٤ \text{ ساعه} = ٦,٢٥ \text{ دقيقه}$$

بمعنى أن كل قائد سيارة سوف يقضى فى المتوسط ٦,٢٥ دقيقه فى صف الإنتظار .

(٥) إحتمال أن تكون المحطة في حالة تشغيل :

$$= ح = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{١٠}{١٦} = ٠,٦٢٥$$

بمعنى إحتمال وجود سيارة واحدة على الأقل بالمحطة = ٠,٦٢٥

(٦) إحتمال أن تكون محطة البنزين عاطلة :

$$= \bar{ح} = ١ - ح = \left(١ - \frac{\lambda}{\mu}\right) = ١ - ٠,٦٢٥ = ٠,٣٧٥$$

بمعنى أن إحتمال عدم وجود أي سيارة في المحطة = ٠,٣٧٥

(٧) إحتمال أن يزيد عدد السيارات في المحطة عن (٤) :

$$ح\,(ن > ٤) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{٢+١} = \left(\frac{١٠}{١٦}\right)^{٤+١} = ٠,٠٩٥$$

مثال (٤)

وجد صاحب متجر أن العملاء يستعملون التليفون بالمحل ، كل (٥) دقائق ، وأن طول المكالمة (٤) دقائق ، والمطلوب حساب كل من :

ع ، عف ، و ، وف

الحــل :

$$\lambda = \frac{٦٠}{٥} = ١٢ \text{ وحدة/ساعة} \quad , \quad \mu = \frac{٦٠}{٤} = ١٥$$

(١) ع = متوسط عدد العملاء فى النظام

$$= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{١٢}{١٥ - ١٢} = ٤ \text{ عملاء}$$

أي أنه يوجد فى المتوسط ٤ أشخاص فى النظام ٠

(٢) ع ف = متوسط عدد السيارات فى الصف

$$= \frac{\lambda^{2}}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{١٢^{٢}}{١٥(١٥-١٢)} = ٣,٢ \text{ عميل}$$

(٣) و = متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى النظام

$$= \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{١}{١٥-١٢} = \frac{١}{٣} \text{ ساعه} = ٢٠ \text{ دقيقة}$$

(٤) وف = متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى الصف

$$= \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{١٢}{١٥(١٥-١٢)}$$

$$= \frac{١٢}{٤٥} \text{ ساعه} = ١٦ \text{ دقيقة}$$

(١٠-٤) تحليل التعادل :

كمية التعادل هي الكمية التي تؤدي إلى تعادل الإيرادات مع المصروفات ، أي هي النقطة التي يبلغ الربح عندها الصفر ٠

التكاليف :

التكاليف الثابتة : هي التكاليف التي لا تتوقف على كمية الإنتاج ٠

التكاليف المتغيرة : هي التكاليف التي تتوقف على كمية الإنتاج ، ونجد أن :

☒ التكاليف المتغيرة الكلية (م)

= كمية الإنتاج × التكاليف المتغيرة للوحدة الواحدة

$\therefore$ م = ن × $م_و$

☒ التكاليف الثابتة للوحدة = $\frac{\text{التكاليف الكلية}}{\text{عدد الوحدات}}$

$\therefore$ $ث_و = \frac{ث}{ن}$

☒ التكاليف الكلية (ك) = ث + ($م_و$ × ن)

فمثلاً :

إذا كانت التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ٣٠٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة ($م_و$) = ٥٠٠٠

كمية الإنتاج (ن) = ١٠٠ وحدة

$\therefore$ التكاليف الكلية (ك) = ث + ($م_و$ × ن)

= ٣٠٠٠٠٠ + (٥٠٠ × ١٠٠)

= ٣٠٠٠٠٠ + ٥٠٠٠٠ = ٣٥٠٠٠٠ جنيه

الإيرادات :

☒ الإيراد الكلي (ر) = كمية الإنتاج (ن) × سعر الوحدة الواحدة (ع)

☒ الربح (ح) = الإيراد الكلي (ر) - التكاليف الكلية (ك)

☒ نقطة التعادل : هي النقطة التي تتعادل عندها الإيرادات الكلية مع التكاليف الكلية ، أي هي النقطة التي يكون عندها الربح يعادل الصفر .

والكمية التي تُنتج في مثل هذه الحالة يُطلق عليها كمية التعادل ، ويكون :

$$\text{☒ كمية التعادل} = \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{سعر بيع الوحدة} - \text{التكاليف المتغيرة للوحدة}}$$

مثال (١)

إذا كانت التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ٣٠٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة ($م_و$) = ٥٠٠٠ جنيه

سعر بيع الوحدة = ٦٠٠٠ جنيه .

الحد الأقصى لعدد الوحدات المنتجة (ن) = ٥٠٠ وحدة

المطلوب :

(١) تحديد نقطة التعادل جبرياً وبيانياً ؟.

(٢) تحديد نسبة التعادل ؟.

(٣) ماذا يحدث لو إرتفع سعر بيع الوحدة إلى (٧٠٠٠) جنيه ؟.

(٤) ماذا يحدث لو إنخفضت التكاليف المتغيرة للوحدة إلى (٤٠٠٠) جنيه

(٥) ماذا يحدث لو زادت التكاليف الثابتة (٥٠٠٠٠٠) جنيه ؟.

الحل :

(١) تحديد نقطة التعادل جبرياً وبيانياً

كمية التعادل = التكاليف الثابتة ÷ (سعر بيع الوحدة – التكاليف المتغيرة للوحدة)

∴ كمية التعادل = ٣٠٠٠٠٠ ÷ (٦٠٠٠–٥٠٠٠) = ٣٠٠ وحدة

∴ التكاليف الكلية (ك) = ث + (م و × ن)

= ٣٠٠٠٠٠ + (٣٠٠ × ٥٠٠٠)

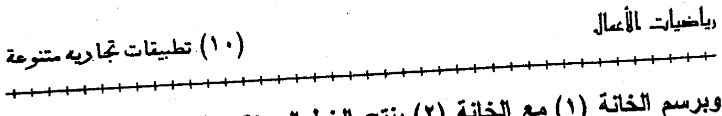
= ٣٠٠٠٠٠ + ١٥٠٠٠٠٠ = **١٨٠٠٠٠٠** جنيه

∴ الإيرادات = ٣٠٠ × ٦٠٠٠ = **١٨٠٠٠٠٠** جنيه

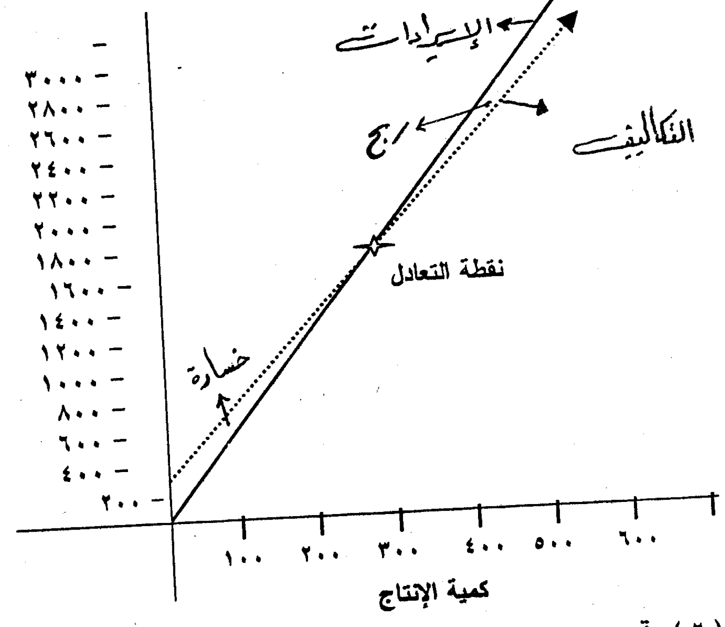
التمثيل البياني لنقطة التعادل :

لتحديد نقطة التعادل بيانياً يتم إفتراض قيم للوحدات المنتجة وتحديد قيم الإيرادات الكلية والتكاليف الكلية عندها كما في الجدول التالي :

عدد الوحدات (١)	الإيرادات الكلية (٢) (١) × ٦٠٠٠	التكاليف المتغيرة (٣) (١)×٥٠٠٠	التكاليف الثابتة (٤)	التكاليف الكلية (٥) (٣)+(٤)
صفر	صفر	صفر	٣٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠
١٠٠	٦٠٠٠٠٠	٥٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠	٨٠٠٠٠٠
٢٠٠	١٢٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠	١٣٠٠٠٠٠
٣٠٠	١٨٠٠٠٠٠	١٥٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠	١٨٠٠٠٠٠
٤٠٠	٢٤٠٠٠٠٠	٢٠٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠	٢٣٠٠٠٠٠
٥٠٠	٣٠٠٠٠٠٠	٢٥٠٠٠٠٠	٣٠٠٠٠٠	٢٨٠٠٠٠٠



وبرسم الخانة (١) مع الخانة (٢) ينتج الخط المستقيم الممثل للإيرادات الكلية (وهـو الخط المتصل في الرسم) ، ومن ناحية إخرى ، برسم الخانة (١) مع الخانة (٥) ينتج الخط المستقيم الممثل للتكاليف الكلية (وهو الخط المتقطع)



(٢) تحديد نسبة التعادل

$$\text{نسبة التعادل} = \frac{\text{كمية التعادل}}{\text{الحد الأقصى للإنتاج}}$$

$$\therefore \text{نسبة التعادل} = \frac{٣٠٠}{٥٠٠} = ٦٠\ \%$$

(٣) تحديد التغير الذي يحدث :

☐ إذا إرتفع سعر بيع الوحدة من (٦٠٠٠) إلى (٧٠٠٠) جنيه

∴ كمية التعادل = $\frac{٣٠٠٠٠٠}{٧٠٠٠-٥٠٠٠}$ = ١٥٠ وحدة

أي أن زيـادة سـعر بـيع الوحدة يؤدي إلى إنخفاض كمية التعادل (والعكس صحيح)

☐ إذا إنخفضـت التكاليف المتغيرة للوحدة الواحدة من (٥٠٠٠) إلى (٤٠٠٠) جنيه ، فإن :

∴ كمية التعادل = $\frac{٣٠٠٠٠٠}{٦٠٠٠-٤٠٠٠}$ = ١٥٠ وحدة

أي أن إنخفـاض التكالـيف المتغيرة للوحدة الواحدة يؤدي إلى إنخفاض كمية التعادل (والعكس صحيح)

☐ إذا زادت التكاليف الثابتة إلى (٥٠٠٠٠٠) جنيه ، فإن :

∴ كمية التعادل = $\frac{٥٠٠٠٠٠}{٦٠٠٠-٥٠٠٠}$ = ٥٠٠ وحدة

أي أن زيادة التكاليف الثابتة يؤدي إلى زيادة كمية التعادل (والعكس صحيح)

مثال (٢)

إذا كانت التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ٤٠٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة ($م_و$) = ٤٠٠٠ جنيه

سعر بيع الوحدة = ٥٠٠٠ جنيه •

الحد الأقصى للإنتاج = ٥٠٠ وحدة

المطلوب : تحديد نقطة التعادل ونسبة التعادل ؟•

الحل :

(١) تحديد نقطة التعادل جبرياً

$$\text{كمية التعادل} = \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{سعر بيع الوحدة} - \text{التكاليف المتغيرة للوحدة}}$$

$$\therefore \text{كمية التعادل} = \frac{٤٠٠٠٠٠}{٥٠٠٠-٤٠٠٠} = ٤٠٠ \text{ وحدة}$$

(٢) تحديد نسبة التعادل

$$\text{نسبة التعادل} = \frac{\text{كمية التعادل}}{\text{الحد الأقصى للإنتاج}}$$

$$\therefore \text{نسبة التعادل} = \frac{٤٠٠}{٥٠٠} = ٨٠ \%$$

مثال (٣)

بمعلومية الآتي ، المطلوب حساب نقطة التعادل بالكمية والقيمة:

التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ١٥٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة (م و) = ٦٠٠ جنيه

سعر بيع الوحدة = ١١٠٠ جنيه .

علماً بأن المشروع يمكنه إنتاج ١٠٠٠ وحدة سنوياً

الحل :

(١) تحديد نقطة التعادل بالكمية

$$\text{كمية التعادل} = \frac{\text{التكاليف الثابتة}}{\text{سعر بيع الوحدة} - \text{التكاليف المتغيرة للوحدة}}$$

∴ كمية التعادل = $\frac{150000}{1100-600}$ = ٣٠٠ وحدة

وهـذا يعنـي أنـه عند إنتاج وبيع ٣٠٠ وحدة يتحقق التعادل بين الإيرادات وتكاليف الإنتاج ٠

(٢) تحديد نقطة التعادل بالقيمة

∴ نقطة التعادل بالقيمة = $\frac{ث}{1-\frac{م_و}{ع}}$

∴ نقطة التعادل بالقيمة = $\frac{150000}{1-\frac{600}{1100}}$ = ٣٣٠٠٠٠ جنيه

وهـو مـا يعنـي أنه عند مبيعات قيمتها ٣٣٠٠٠٠ جنيه يتحقق التعادل بين الإيرادات وتكاليف الإنتاج ٠وعلى ذلك فإن من مصلحة المشروع زيادة مبيعاته (كمية ، وقيمة) لتحقيق الهدف منه وهو الربحية التجارية

مثال (٤)

في المثال السابق ، المطلوب :

(١) ماذا يحدث لو إنخفض سعر بيع الوحدة إلى (٩٠٠) جنيه ؟٠

(٢) بفرض أن المشروع أراد تحقيق ربح قدره ٣٠٠٠٠٠ جنيه ، فما هو الحجم اللازم للمبيعات لتحقيق هدف المشروع ؟٠

(٣) إذا كـان من المتوقع تحقق نفقات بيع وتوزيع قدرها ٣٠٠٠٠ جنيه ، فما هي الزيادة المطلوبة في المبيعات المقابلة تلك النفقات ؟٠

الحل :

(١) وبفرض أن سعر بيع الوحدة إنخفض إلى (٩٠٠) جنيه

∴ كمية التعادل = $\frac{١٥٠٠٠٠}{٩٠٠-٦٠٠}$ = ٥٠٠ وحدة

أي أن إنخفاض سعر بيع الوحدة يؤدي إلى زيادة كمية التعادل .

(٢) الحجم اللازم للمبيعات :

باستخدام الرموز التالية :

** التكاليف الثابتة = ث ** الربح المستهدف = ح

** التكاليف المتغيرة للوحدة = $م_و$ ** سعر بيع الوحدة = ع

الحجم اللازم للمبيعات = $\frac{ث+ح}{١-\frac{م_و}{ع}}$

∴ الحجم اللازم للمبيعات = $\frac{٣٠٠٠٠٠+١٥٠٠٠٠}{١-\frac{٦٠٠}{١١٠٠}}$ = $\boxed{٩٩٠٠٠٠}$ جنيه

∴ كمية المبيعات = $\frac{٩٩٠٠٠٠}{١١٠٠}$ = $\boxed{٩٠٠}$ وحدة

(٣) الزيادة المطلوبة في المبيعات :

بالرموز السابقة بالإضافة إلى أن نرمز للمصروفات بالرمز (م) ، يكون :

الزيادة اللازمة في المبيعات = $\frac{م}{١-\frac{م_و}{ع}}$

∴ الزيادة اللازمة في المبيعات = $\frac{٣٠٠٠٠}{١-\frac{٦٠٠}{١١٠٠}}$ = $\boxed{٦٦٠٠٠}$ جنيه

∴ الزيادة في كمية المبيعات = $\frac{٦٦٠٠٠}{١١٠٠}$ = $\boxed{٦٠}$ وحدة

تمارين الفصل العاشر

(١) إذا كانت مصفوفة إحتمالات التحول بين ثلاثة مصانع (أ ، ب ، جـ) هي :

خسارة \ مكسب	أ	ب	جـ
أ	٠,٧	صفر	صفر
ب	٠,٢	١	٠,١
جـ	٠,١	صفر	٠,٩

المطلوب تحديد أنصبة المصانع الثلاث في الفترة المقبلة إذا كانت الأنصبة الحالية هي (٠,٢٥ ، ٠,٣٥ ، ٠,٤٠) على التوالي ؟.

(٢) فى أول مارس من عام ٢٠٠٠م كانت الشركه (أ) تحصل على ٤٥ ٪ من السوق المحليه ، الشركه (ب) تحصل على ٣٥٪ ، الشركه (جـ) تحصل على الباقي من السوق ، وبفرض توافر البيانات التالية :

الشركة (أ) إحتفظت بـ ٨٥٪ من عملائها ، وخسرت إلى الشركة (ب) ١٠٪ ، وخسرت إلى الشركة (جـ) ٥٪ . أما الشركة (ب) فقد إحتفظت بـ ٧٠٪ من عملائها ، وخسرت إلى الشركة (أ) ٢٠٪ ، وخسرت إلى الشركة (جـ) ١٠٪. أما الشركة (جـ) فقد إحتفظت بـ ٧٠٪ من عملائها ، وخسرت إلى الشركة (أ) ١٠٪ فقط ، والمطلوب :

١. حساب حصص الشركات الثلاث في السوق في أول مارس من عام ٢٠٠١ ؟

٢. حساب حصص الشركات الثلاث في السوق في أول أبريل من عام ٢٠٠١ ؟

(٣) فى أول يناير عام ٢٠٠١ كانت أنصبة أربعة مصانع (أ ، ب ، جـ ، د) من مصانع الأسمنت من السوق المحليه متساوية أ وخلال عام ٢٠٠١ وُجد أن المصنع (أ) إحتفظ بـ ٧٠٪ من عملائه ، وكسب ٣٠٪ ، ٤٠٪ ، ١٠٪ من عملاء المصانع (ب ، جـ ، د) على التوالي ٠ أما المصنع (ب) فقد إحتفظ بـ ٦٠٪ من عملائه وكسب ١٠٪ من عملاء المصانع (أ) فقط ٠ أما المصنع (د) فقد إحتفظ بـ ٨٠٪ من عملائه وكسب ١٠٪ من عملاء المصانع (ب) فقط والمطلوب : حساب حصص الشركات الأربع في السوق المحلية في أول يناير من عام ٢٠٠٢ ؟

(٤) فى أول سبتمبر من عام ٢٠٠١ كانت أنصبة الجرائد القومية (الأهرام الأخبار ، الجمهورية) في محافظة الدقهلية هي (٤٥٪ ، ٣٥٪ ، ٢٠٪) على التوالي ، وفي خلال شهر سبتمبر حدثت التغيرات التالية :

☒ إحتفظت جريدة الأهرام بـ $\frac{٥}{٨}$ من المشتركين وخسرت الباقي للأخبار

☒ إحتفظت جريدة الأخبار بـ $\frac{٣}{٤}$ من المشتركين وخسرت الباقي للأهرام

☒ إحتفظت جريدة الجمهورية بـ $\frac{٧}{١٢}$ من المشتركين وخسرت $\frac{٣}{١٢}$ للأخبار والباقي للأهرام٠

فإذا فرض عدم وجود مشتركين جدد ، وأن جميع المشتركين القدامى لن يستغنو عن صحفهم ، المطلوب :

١. ما هو نصيب كل جريدة في أول أكتوبر من عام ٢٠٠١ ؟
٢. إذا إستمر نمط المكسب والخسارة بالنسبة للصحف خلال شهر أكتوبر ، فما هو نصيب كل جريدة في أول نوفمبر من عام ٢٠٠١ ؟

(٥) في إحدى الجامعات وجد أن الطلاب يتحولون من كلية إلى أخرى وفق مصفوفة التحول التالية :

خسارة \ مكسب	الآداب	التجارة	التربية
الآداب	٠,٧	صفر	٠,١
التجارة	٠,٢	٠,٨	٠,١
التربية	٠,١	٠,٢	٠,٨

فإذا كان عدد الطلاب في بداية الدراسة من عام ٢٠٠٢ في الكليات الثلاث هو (٢٥٠٠ ، ٤٥٠٠ ، ٣٠٠٠) على التوالي ، فما هو العدد المتوقع من الطلاب في تلك الكليات في بداية الدراسة من العام ٢٠٠٣ ؟

(٦) بفرض أن السوق الإجمالية للمستهلكين (١٠٠٠) مستهلك ، موزعين على ثلاث سلع (س ، ص ، ع) ، والجدول التالي حركة المكسب والخسارة بين العملاء لمدة شهر :

السلعه	عدد العملاء فى أول مارس	تحركات العملاء		عدد العملاء فى أول أبريل
		المكسب	الخساره	
س	٢٥٠	٧٠	٢٠	٣٠٠
ص	٤٠٠	٣٠	٥٠	٣٨٠
ع	٣٥٠	٦٠	٩٠	٣٢٠
المجموع	١٠٠٠	١٦٠	١٦٠	١٠٠٠

وكانت تحركات العملاء بشكل تفصيلي موضحة في الجدول التالي :

السلعه	عدد العملاء فى أول مارس	تحركات العملاء						عدد العملاء فى أول أبريل
		المكسب			الخساره			
		من س	من ص	من ع	إلى س	إلى ص	إلى ع	
س	٢٥٠	صفر	٥٠	٢٠	صفر	٢٠	صفر	٣٠٠
ص	٤٠٠	١٠	صفر	٢٠	٣٠	صفر	٢٠	٣٨٠
ع	٣٥٠	٤٠	٢٠	صفر	٥٠	٤٠	صفر	٣٢٠
المجموع	١٠٠٠							١٠٠٠

والمطلوب تحديد نصيب كل سلعة من السوق في أول مايو ؟.

(٧) إذا علم لديك أن البواخر تصل بميناء بورسعيد بمعدل (٩) بواخر فى الأسبوع فى المتوسط ، بينما يستطيع الميناء أن يستقبل البواخر بمعدل (١٢) باخره فى الأسبوع فى ، إحسب كل من :

(١) متوسط عدد البواخر فى الميناء ؟

(٢) متوسط عدد البواخر فى الصف ؟

(٣) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى النظام ؟.

(٤) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى الصف ؟.

(٥) إحتمال أن يكون الميناء في حالة تشغيل ؟.

(٦) إحتمال أن يكون الميناء عاطل ؟.

(٧) إحتمال أن يزيد عدد البواخر فى الميناء عن (٣) ؟.

(٨) محطة بنزين بها مضخة واحدة ، تصل السيارات إلى المحطة وفق توزيع بواسون بمعدل (٨) سيارات كل ساعة ، وقد تبين أن وقت خدمة

السيارات يتبع التوزيع الأسي بمتوسط ٣,٢٥ دقيقة لكل سيارة واحدة ،

والمطلوب حساب :

(١) متوسط عدد السيارات فى المحطة ؟

(٢) متوسط عدد السيارات فى الصف ؟

(٣) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى النظام ؟٠

(٤) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى الصف ؟٠

(٥) إحتمال أن تكون المحطة في حالة تشغيل ؟٠

(٦) إحتمال أن تكون المحطة عاطلة ؟٠

(٧) إحتمال أن يزيد عدد السيارات فى المحطة عن (٣) ؟٠

(٩) فى أحد المصانع يوجد مخزن للعدد يخدم العمال ، ويصل هؤلاء العمال إلى المخزن بطريقه عشوائيه بمعدل (١٨) عامل فى الساعه فى المتوسط ، وتؤدى الخدمه بواسطة موظف واحد فى المخزن بمعدل (٢٠) عامل فى الساعه فى المتوسط ٠

والمطلوب حساب :

(١) متوسط عدد العمال فى المخزن ؟

(٢) متوسط عدد العمال فى الصف ؟

(٣) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى النظام ؟٠

(٤) متوسط الوقت الذي يقضيه العميل فى الصف ؟٠

(٥) إحتمال أن يكون المخزن في حالة تشغيل ؟٠

(٦) إحتمال أن يكون المخزن عاطل ؟٠

(٧) إحتمال أن يزيد عدد العمال فى المخزن عن (٥) ؟٠

(١٠) تستطيع شركة الكهرباء أن تستقبل شكاوى إنقطاع التيار الكهربى عن العملاء بمعدل (٢) شكوى فى الساعه ، وتملك الشركه سيارة إصلاح تستطيع خدمة (٣) طلبات فى الساعه ، والمطلوب إيجاد كل من :

ع ، عف ، و ، وف

(١١) إفتتح بنك القاهره فرع جديد فى مدينة ٦ أكتوبر ، وبناءاً على البحوث التمهيديه التى قام بها البنك ، توصل إلى أن معدل وصول العملاء ممكن أن يقترب من توزيع بواسون ، وذلك بمتوسط معدل وصول = ١٠ عملاء في الساعه ، وقد خطط البنك لإستخدام خزينه واحده ٠ وقد قدر أن هذه الخزينه يمكن أن تخدم فى المتوسط ١٢ عميل / ساعه ، وبفرض أن توزيع معدل الخدمه يتبع أيضاً توزيع بواسون (أي أن توزيع وقت الخدمه يُعتبر توزيع أسى) ٠

المطلوب :

١- تحديد متوسط عدد طالبى الخدمه (العملاء) فى النظام ؟٠

٢- تحديد متوسط الوقت الذى يقضيه العميل فى النظام ؟٠

٣- تحديد متوسط عدد طالبى الخدمه فى الصف ؟٠

٤- تحديد متوسط وقت الإنتظار فى الصف ؟٠

٥- إحتمال أن تكون الخزينه مشغوله ،(معامل الإستخدام فى النظام)

٦- إحتمال عدم وجود عملاء بالنظام ؟٠

٧- إحتمال وجود ٣ عملاء بالنظام ؟٠

٨- إحتمال أن يكون عدد العملاء فى الصف أكبر من ٤ عملاء ؟٠

(١٢) شركة الحديد والصلب لديها وحده لعلاج العاملين بها ، وقد توصلت الشركه من واقع خبرتها أن وصول العاملين للعلاج يتبع توزيع بواسون ، ويبلغ متوسط وصول العمال للحصول على الخدمه العلاجيه ٥ عمال / ساعه ، فى حين يبلغ متوسط معدل أداء الخدمه العلاجيه ٦ عمال / ساعه ٠

المطلوب :

١- تحديد متوسط عدد طالبى الخدمه (العمال المترددين على الوحده العلاجيه) فى النظام ؟٠

٢- تحديد متوسط الوقت الذى يقضيه طالب الخدمه فى النظام ؟٠

٣- تحديد متوسط عدد طالبى الخدمه فى الصف ؟٠

٤- تحديد متوسط وقت الإنتظار فى الصف ؟٠

٥- إحتمال عدم وجود طالبى خدمه بالنظام ؟٠

٦- إحتمال وجود ٣ عمال بالنظام ؟٠

(١٢) شركة كهرباء تستقبل شكاوى إنقطاع التيار الكهربائى من العملاء بمعدل ٢ شكوى فى الساعه ، وتملك الشركه سيارة إصلاح مزوده بجهاز راديو يستطيع خدمة ٣ طلبات فى الساعه فى المتوسط :

والمطلوب حساب :

١- متوسط الوقت الذى يُعاد فيه التيار شاملاً وقت الإصلاح ؟٠

٢- متوسط الوقت الذى ينتظره العميل بدون إصلاح ؟٠

٣- متوسط عدد المكالمات التى تنتظر الخدمه ؟٠

٤- متوسط عدد المكالمات التى تنتظر الخدمه شاملةً المكالمات تحت الخدمه ؟٠

(١٣) تصل عربات النقل المحمله إلى المخزن لتفريغها بمعدل (١٠) عربات فى الساعه ، ويستطيع عمال التفريغ القيام بتفريغ (١٢) عربه فى الساعه . والمطلوب حساب :

١- متوسط عدد العربات فى صف الإنتظار ؟.

٢- متوسط عدد العربات فى النظام ؟.

٣- متوسط الوقت الذى تنتظره العربه بدون تفريغ ؟.

٤- متوسط الوقت الذى تنتظره العربه حتى تعود مره أخرى ليتم تحميلها ؟.

(١٤) محل للحلاقة به عامل واحد يخدم العملاء بأسلوب من يحضر أولاً يُخدم أولاً ، وبسبب سمعة المحل فإن العملاء يرغبون في الإنتظار للحصول على الخدمة ، وقد وجد أن العملاء يأتون إلى المحل وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل (٢) في الساعة ، وزمن الخدمة يتبع توزيع أسي بمتوسط (٢٠) دقيقة للعميل ، والمطلوب :

١. عدد العملاء المتوقع في المحل ؟

٢. العدد المتوقع من العملاء منتظري الخدمة ؟

٣. متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في المحل ؟

(١٥) إحسب نقطة التعادل في الحالات التالي :

(أ) التكاليف الثابتة ١٥٠٠٠٠ جنيه ، سعر بيع الوحدة (١٣٠٠) جنيه ، والتكلفة المتغيرة للوحدة (٨٠٠) جنيه ؟

(ب) حالة زيادة التكلفة المتغيرة ١٠٪ ، وخفض سعر البيع ١٥٪ مستخدماً البيانات في (أ) .

(جـ) إجمالي التكلفة الثابتة (١٠٠٠٠٠) جنيه ، وقيمة المبيعات المقدرة (٣٠٠٠٠٠) جنيه ، والتكلفة المتغيرة المقدرة للمبيعات (١٥٠٠٠٠) جنيه ٠

(١٦) إحسب نقطة التعادل من واقع البيانات التالية :

التكاليف الثابتة سنويا = ١٠٠٠٠٠٠ جنيه

سعر بيع الوحدة = ٥٠ جنيه

قيمة المبيعات = ٤٠٠٠٠٠٠ جنيه ؟

التكلفة المتغيرة للمبيعات = ٢٥٠٠٠٠٠ جنيه ؟

وإذا رغبت المنشأة تحقيق أرباح صافية قدرها ٩٠٠٠٠٠ جنيه ، فما هو حجم المبيعات اللازم لتحقيق ذلك ؟٠

(١٧) إذا علمت أن

التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ٦٠٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة (م و) = ٦٠٠٠ جنيه

سعر بيع الوحدة = ٨٠٠٠ جنيه ٠

الحد الأقصى لعدد الوحدات المنتجة (ن) = ٥٠٠ وحدة

المطلوب :

(١) تحديد نقطة التعادل جبرياً وبيانياً ؟٠

(٢) تحديد نسبة التعادل ؟٠

(٣) ماذا يحدث لو إرتفع سعر بيع الوحدة إلى (١٠٠٠٠) جنيه ؟٠

(٤) ماذا يحدث لو إنخفضت التكاليف المتغيرة للوحدة إلى (٥٠٠٠) جنيه

(٥) ماذا يحدث لو زادت التكاليف الثابتة إلى (١٠٠٠٠٠٠) جنيه ؟٠

(١٨) إذا كانت التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ٥٠٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة ($م_و$) = ٦٠٠٠ جنيه

سعر بيع الوحدة = ٩٠٠٠ جنيه .

الحد الأقصى للإنتاج = ٦٠٠ وحدة

المطلوب : تحديد نقطة التعادل ونسبة التعادل ؟.

(١٩) إذا علمت أن :

التكاليف الثابتة الكلية (ث) = ٣٠٠٠٠٠

التكاليف المتغيرة للوحدة ($م_و$) = ٧٠٠ جنيه

سعر بيع الوحدة = ١٢٠٠ جنيه .

علماً بأن المشروع يمكنه إنتاج ١٥٠٠ وحدة سنوياً

المطلوب :

(أ) حساب نقطة التعادل بالكمية والقيمة؟

(ب)ماذا يحدث لو إرتفع سعر بيع الوحدة إلى (١٣٠٠) جنيه ؟.

(ت)بفرض أن المشروع أراد تحقيق ربح قدره ٥٠٠٠٠٠ جنيه ، فما هو الحجم اللازم للمبيعات لتحقيق هدف افمشروع ؟.

(ث) إذا كان من المتوقع تحقق نفقات بيع وتوزيع قدرها ٤٠٠٠٠ جنيه ، فما هي الزيادة المطلوبة في المبيعات المقابلة تلك النفقات

المراجع

أولاً : المراجع العربية

١- د. إبراهيم محمد مهدى ، د. محمد توفيق البلقينى، "أسس التحليل الرياضى للتجاريين والاقتصاديين" ، ١٩٨٩/١٩٨٨ ، مكتبة الجلاء الجديدة، المنصورة.

٢- د. إبراهيم محمد مهدى ، د. فاطمة علي عبد العاطي ، د. جمال عبد الباقي واصف "رياضيات الأعمال للتجاريين والاقتصاديين" ، ٢٠٠١م ، مكتبة الجلاء الجديدة ، المنصورة.

٣- د. سلطان محمد عبد الحميد ، " أسس التحليل الرياضى للتجاريين والاقتصاديين (الجزء الثاني) " ٢٠٠١/٢٠٠٠ ، ، مكتبة الجلاء الجديدة، المنصورة .

٤- د. عادل عبد الحميد عز ، الرياضيات البحتة للتجاريين ، مكتبة دار النهضة العربية ، ١٩٩٩م.

٥- د. فاروق عبد العظيم أحمد ، د. يحيى سعد زغلول ، "مبادئ في الرياضيات" ١٩٨٩ ، الدار الجامعية ، بيروت.

٦- د/ محمد توفيق البلقينى وآخرون ، " أسس التحليل الرياضى للتجاريين والاقتصاديين " ١٩٩٩/١٩٩٨ ، ، مكتبة الجلاء الجديدة، المنصورة .

ثانياً : المراجع الأجنبية

(1) Arya, J.C. & Lardner, R.W. "Mathematical Analysis For Business, Economics, and life and Social Sciences " Prentice-Hall, Inc.

(2) Ernest F.H. & Richard S.P., "Introductory Matematical Analysis for Business, Economics, and the life Social Sciences ", Prentice-Hall, Inc.

(3) Shoo & Shoo, "Mathematics of Management and Finance", South – Western College Publishing, U.S.A.

رقم الإيداع : ١٣٤٦٨ / ٢٠٠٢
الترقيم الدولي : I.S.B.N
977-04-3832-4



للطباعة
يسرى حسن إسماعيل
شارع عبد العزيز - الهدارة ٢٤ عابدين
عابدين ت : ٣٩١٠٧٥٠ دار السلام ت : ٣٢٠٩١١٨٠